Zur Quadratur des Kreises

— oder —

„Das Runde muss in das Eckige“

Jens-Peter M. Zemke
zemke@tu-harburg.de

Institut für Numerische Simulation
Technische Universität Hamburg-Harburg

19.10.2009 — Studiendekanat ET/IT
20.10.2009 — Studiengänge AIW/LUM

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Übersicht

Ursprung

Bereits die Geometer der Ägypter, Babylonier, Inder und Griechen bemerkten, dass das Verhältnis des Umfanges eines Kreises (heutzutage geschrieben als $2\pi r$) zu seinem Durchmesser (also $2r$) unabhängig von seinem Durchmesser ist und etwas größer ist als 3.

Die Problemstellung der „Quadratur des Kreises“ wurde von dem griechischen Philosophen Anaxagoras (aus)formuliert, als sich dieser, angeklagt wegen Asebie (Gottlosigkeit), um das Jahr 430 v. Chr. im „Gefängnis“ befand. Er hatte die Sonne für einen glühenden Stein, größer als die Peloponnes, der unter anderem mit seinem Licht dafür sorge, dass der Mond scheine, und nicht für einen Gott gehalten.

(Quelle: Wikipedia)

Approximationen von π

Es gibt viele Approximationen für die Zahl π. Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine Art von Zahl π denn sei.

In der Bibel ist folgende Approximation zu finden: Im ersten Buch Könige 7:23–26, siehe auch zweite Chronik 4:2–5, steht implizit, dass π drei ist.

Im Papyrus Rhind steht die Approximation $(16/9)^2 \approx 3.16049$.

Archimedes leitete sehr früh Schranken für π her:

$$3.1408 \approx \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

Maple spuckt (unter Verwendung von `Digits:=50;`) die Approximation

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751$$

aus.

Approximationen von π

Wer soll sich das denn merken?

Im Russischen gibt es z. B. diesen Merkvers:

«Што(3) я(1) знаю(4) о(1) кругах(6)»

Im Deutschen z. B. diesen Merkvers:

„Wie(3), o(1) dies(4) π(1) macht(5) ernstlich(9) so(2) vielen(6) viele(5) Müh(3), Lernt(5) immerhin(8), Jünglinge(9), leichte(7) Verselein(9), wie(3) so(2) zum(3) Beispiel(8) dies(4) dürfte(6) zu(2) merken(6) sein(4)!“

Wer lieber Geschichtsdaten parat hat:

„Drei Komma (Hus verbrannt) und (Brennabor) bringen die Zahl Pi hervor.“

Johannes Hus wurde 1415 verbrannt, Brennabor (lateinisch für Brandenburg) wurde 926 zerstört.

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: Was für eine Art Zahl ist π?

Sie kennen: Natürliche Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Man sieht sofort: Es gibt gleichviele Zahlen in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$, eine eindeutige Nummerierung ist möglich.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{p/q \,:\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ werden mittels $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ definiert. Ist π eventuell rational? Nein, aber: Wer hier kann das beweisen?

Es gibt auch gleichviele Zahlen in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$, eine eindeutige Nummerierung ist wieder möglich, dieses ist Cantors erstes Diagonalargument.

Klassifizierung von Zahlen

Als nächstes lernt man die reellen Zahlen kennen. Diese werden definiert als Grenzwerte einer Intervallschachtelung, mittels Dedekindscher Schnitte oder als Grenzwerte von Cauchy-Folgen.

Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig, es gibt keine eindeutige Nummerierung der reellen Zahlen. Dieses ist die sogenannte Überabzählbarkeit der reellen Zahlen; der Beweis erfolgt über Cantors zweites Diagonalargument.

Die Zahl π ist reell, Archimedes hat als erster eine Folge von ineinander enthaltenen Intervallen konstruiert, welche alle π enthalten und deren Intervallenden gegeneinander konvergieren und damit eine reelle Zahl definieren.

Es gibt weitere Erweiterungen: Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$, (Hamiltonsche) Quaternionen $\mathbb{H}$, die Cayley-Zahlen oder Oktonionen $\mathbb{O}$. Andere hyperkomplexe Erweiterungen der reellen Zahlen, die Non-Standard-Zahlen von Robinson . . .

Klassifizierung von Zahlen

Was ist mit den Zahlen in $\mathbb{R}$, welche nicht in $\mathbb{Q}$ sind? (Und derer gibt es viele, nämlich viel viel mehr als es Zahlen in $\mathbb{Q}$ gibt.) Diese sind die sogenannten irrationalen Zahlen.

Dass eine Zahl eine irrationale Zahl ist, beweist man meist mittels eines Widerspruchsbeweises.

Wir zeigen exemplarisch: Alle Zahlen der Form $\pm\sqrt{p}$ mit einer Primzahl p sind nicht rational, also irrational.

Denn anderenfalls sei der gekürzte Bruch

$$\pm\sqrt{p} = \frac{z}{n} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{z^2}{n^2} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n^2 p = z^2$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben.

Klassifizierung von Zahlen

Wegen

$$n^2 p = z^2$$

muss aber p in der eindeutigen Primfaktorzerlegung von z^2 enthalten sein.

Da aber die Primfaktorzerlegung von z^2 aus der von z nach

$$z = \prod_{k=1}^{m} p_k^{j_k} \quad \Rightarrow \quad z^2 = \prod_{k=1}^{m} p_k^{2j_k}$$

folgt, muss z^2 sogar durch p^2 teilbar sein.

Also ist

$$\frac{n^2}{p} = \frac{z^2}{p^2} \in \mathbb{N},$$

also hat n^2 den Primfaktor p.

Klassifizierung von Zahlen

Demnach hat n^2 den Primfaktor p, und demzufolge nach dem vorherigen Argument sogar den Primfaktor p^2.

Also kann man sowohl z als auch n durch p^2 teilen, was einen Widerspruch zur Annahme, dass der Bruch gekürzt war, darstellt.

Sind denn diese (einfachen) Wurzeln alles, was neu hinzukommt, um aus $\mathbb{Q}$ die Menge $\mathbb{R}$ zu erhalten?

Eine interessante Erweiterung der rationalen Zahlen sind die sogenannten konstruierbaren Zahlen, welche die eben genannten irrationalen Zahlen $\pm\sqrt{p}$ umfassen.

Klassifizierung von Zahlen

Dabei handelt es sich um eine Idee der griechischen Geometer. Nur Zahlen sind interessant, welche unter Verwendung eines Lineals und eines Zirkels als Strecken konstruiert werden können, ausgehend von einer Strecke mit Einheitslänge.

Die Griechen glaubten lange, dass alle Strecken „kommensurabel“ seien, also mit einem gleichen Maß meßbar seien. Die obige Konstruktion und etwas Nachdenken ergibt aber sofort, dass bereits ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit Kathetenlängen Eins dieser Annahme widerspricht, da dann die Hypotenuse die nicht rationale Länge $\sqrt{2}$ hat.

Anaxagoras formulierte das Problem der Quadratur des Kreises denn auch in diesem Rahmen: Die Quadratur des Kreises ist demnach die Aufgabe, nur mittels Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit der gleichen Fläche zu konstruieren. Wieder gingen die Griechen von der prinzipiellen Durchführbarkeit dieser Aufgabe aus.

Klassifizierung von Zahlen

Was für Zahlen sind denn nun diese konstruierbaren Zahlen?

Ein „Lineal“ erfüllt Geradengleichungen der Form

$$ax + by = c,$$

meist im Fall $b \neq 0$ in der Schule noch geschrieben mittels der „Steigung“ und dem „y-Achsen-Abschnitt“,

$$y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ein „Zirkel“, ergo, ein Kreis, hier um den Punkt (x_0, y_0) mit Radius r, ist gegeben durch die quadratische Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind Schnitte von Geraden und Kreisen, definiert durch die Koordinaten oder Punkte x und y, gegeben bei gleichzeitiger Erfülltheit von Gleichungen von der Form

$$ax + by = c, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Auflösen nach x und y ergibt Bestimmungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + \left(\frac{-a}{b}x + \frac{c}{b} - y_0\right)^2 &= r^2,\\ (y - y_0)^2 + \left(\frac{-b}{a}y + \frac{c}{a} - x_0\right)^2 &= r^2,\end{aligned}$$

wobei hier jeweils $a \neq 0$ und $b \neq 0$ vorrausgesetzt ist.

Klassifizierung von Zahlen

Es ist für jeden Wert von x und y eine Nullstelle eines quadratischen Polynomes zu berechnen, also eine Wurzel zu ziehen. Die Koeffizienten dieser quadratischen Polynome sind dabei rationale Funktionen der vorher berechneten Zahlen.

Ausgehend von dem Zahlenkörper $\mathbb{Q}$ werden also sukzessive Oberkörper erzeugt durch algebraische Körpererweiterung mit Nullstellen von Polynomen vom Grad 2, als Beispiel erhält man so etwa

$$\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{p + \sqrt{2}q \; : \; p, q \in \mathbb{Q}\}$$

Danach kann man z. B. $\sqrt{3}$ als Nullstelle von $x^2 - 3$ hinzufügen und erhält so

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_2 : &= \mathbb{Q}_1(\sqrt{3}) := \{p + \sqrt{3}q \; : \; p, q \in \mathbb{Q}_1\} \\ &= \{p_1 + \sqrt{2}p_2 + \sqrt{3}p_3 + \sqrt{6}p_4 \; : \; p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Q}\} =: \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Klassifizierung von Zahlen

Man kann natürlich aber auch andere Nullstellen von quadratischen Polynomen erzeugen, so z. B. den goldenen Schnitt

$$\Phi := \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

welcher auch eine irrationale Zahl ist.

Die Frage nach der „Quadratur des Kreises“ ist also die nach der (Un)Möglichkeit der Konstruktion einer geeigneten „Körpererweiterung“ mittels Nullstellen quadratischer Polynome, welche die Zahl π enthält.

Anders ausgedrückt: Läßt sich π eventuell mit endlich vielen (Quadrat-)Wurzeln schreiben als

$$\pi = \sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}}{\sqrt{e}+\sqrt{d}}}?$$

Klassifizierung von Zahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von π, äquivalent dazu, der Konstruierbarkeit eines Quadrates mit der Seitenlänge π bei gegebenem Kreis mit Radius Eins, konnte über 2000 Jahre, genauer, bis in das Jahr 1882, nicht beantwortet werden.

Die Erweiterung der Idee der konstruierbaren Zahlen als Nullstellen quadratischer Polynome auf die Nullstellen von beliebigen (ganzzahligen) Polynomen führte auf die algebraischen Zahlen.

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist dabei algebraisch, wenn sie Nullstelle eines ganzzahligen Polynomes $p \neq 0$ ist,

$$0 = p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

Klassifizierung von Zahlen

Bemerkung: Zu jedem Polynom mit rationalen Koeffizienten existiert ein Polynom mit ganzen Koeffizienten und denselben Nullstellen. Das folgt aus der Multiplikation des rationalen Polynomes mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner der Koeffizienten.

Der Grad des Polynomes mit kleinstem Grad, welches $p(x) = 0$ erfüllt, ist der Grad der algebraischen Zahl x. So hat $\sqrt{2}$ den Grad zwei, und jede rationale Zahl den Grad Eins, da $r = z/n$ Nullstelle von $nx - z$ ist.

Hat das minimale ganzzahlige Polynom p mit $p(x) = 0$ den Höchstkoeffizienten Eins, so ist x eine ganze algebraische Zahl. So ist $\sqrt{2}$ eine ganze algebraische Zahl, die algebraische Zahl

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

als Nullstelle von $2x^2 - 1 = 0$ nicht.

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Nach Cantor kann man zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen abzählbar unendlich ist.

Es gibt nur abzählbar unendlich viele Polynomgrade, pro Polynom hat man nur endlich viele Koeffizienten mit abzählbar unendlich vielen Möglichkeiten, einen Koeffizienten zu wählen, also sind die algebraischen Zahlen abzählbar.

Es gibt also nur abzählbar viele algebraische Zahlen $\mathbb{A}$ in $\mathbb{R}$. Was ist mit den anderen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, den sogenannten transzendenten Zahlen?

Die ersten beweisbar transzendenten Zahlen fand Liouville 1844/1851, (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b; Liouville, 1851), siehe auch (Lützen, 1990, Seite 520–526), diese heissen deshalb Liouville-Zahlen.

Klassifizierung von Zahlen

Liouville gab 1844 an und bewies 1851, dass für alle algebraischen Zahlen α vom Grad $n \geqslant 2$ für eine von $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

gilt.

Algebraische Zahlen sind also diejenigen Zahlen, welche sich nur äusserst schlecht durch (andere) rationale Zahlen annähern lassen.

Später wurde in Arbeiten von Thue, Siegel und Schneider sogar gezeigt, dass sich algebraische Zahlen auch schlecht von anderen algebraischen Zahlen mit niedrigerem Grad approximieren lassen, vergleiche mit dem sogenannten Siegel-Schneider-Theorem.

Klassifizierung von Zahlen

Der Beweis von Liovilles Resultat (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

ist mit einfachen Mitteln nachvollziehbar: Sei α die algebraische Zahl, f das ganzzahlige Polynom und

$$M := \max_{x \in [\alpha-1,\alpha+1]} |f'(x)|.$$

Es seien die von α verschiedenen Nullstellen durch α_1 bis α_m gegeben. Es sei dann ein c mit

$$0 < c < \min\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\}$$

gewählt.

Klassifizierung von Zahlen

Angenommen, es gäbe jetzt ganze $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^n} \leqslant c < 1.$$

Dann ist aufgrund der Wahl von c,

$$0 < c < \min\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\},$$

sowohl p/q im Intervall $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, als auch von den anderen Nullstellen verschieden.

Klassifizierung von Zahlen

Nach dem Mittelwertsatz gibt es jetzt ein ξ zwischen p/q und α, also

$$\xi \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$

so dass

$$\left| f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\xi)|$$

gilt.

Demnach gilt also

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| (|f'(\xi)|)^{-1}.$$

Klassifizierung von Zahlen

Da

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^i$$

ein Polynom mit ganzen Zahlen als Koeffizienten und p/q keine Nullstelle ist, gilt

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i\, p^i q^{n-i}}{q^n} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i\, p^i q^{n-i} \right| \frac{1}{q^n} \geqslant \frac{1}{q^n},$$

und $|f'(\xi)| \leqslant M$.

Zusammen folgt also der Widerspruch

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| (|f'(\xi)|)^{-1} \geqslant \frac{1}{Mq^n} > \frac{c}{q^n} \geqslant \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind Zahlen, welche die Eigenschaft haben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$ existieren, so dass

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

gilt, transzendent.

Solche Zahlen heissen Liouvillesche Zahlen. Liouville bewies auch gleich 1851, dass unter anderem die heute sogenannte Liouvillesche Konstante

$$\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} \approx 0.11000100000000000000000100000000000000000$$

transzendent ist. Es gibt überabzählbar unendlich viele Liouvillesche Zahlen. Die meisten reellen Zahlen gehören aber nicht dazu.

Klassifizierung von Zahlen

Eine echte Obermenge zu den algebraischen Zahlen bilden die berechenbaren Zahlen. Eine Zahl heisst berechenbar, wenn es eine Berechnungsvorschrift (ergo:Turing-Maschine) gibt, nach der jede (Dezimal- oder Binär-)Stelle berechnet werden kann.

Jede algebraische Zahl ist berechenbar. Die Zahl π ist nach Archimedes Ansatz berechnenbar. Die Zahl e ist berechenbar. Ist jede Zahl berechenbar?

Berechenbare Zahlen gehen auf Alan Turing (Turing, 1937; Turing, 1938) zurück, wieder zeigt sich, dass es nur abzählbar unendlich viele berechenbare Zahlen gibt. Es gibt also immer noch unendlich viele nicht berechenbare Zahlen.

Klassifizierung von Zahlen

Zwei Beispiele nicht berechenbarer Zahlen sind die Haltezahl (definiert über das Halteproblem der Informatik) und die Chaitin-Konstanten, als Beispiel

$$\begin{aligned}\Omega := \sum_{p \text{ hält}} 2^{-|p|} \\ &= 0.0000001000000100000011000100001101000111111001011\ldots_2 \\ &= 0.0078749969978123844\ldots_{10},\end{aligned}$$

die mittels der Wahrscheinlichkeit definiert werden, dass ein zufälliges Turing-Programm p mit einer Länge von $|p|$ Bits bei Ausführung auf einer fest gewählten Präfix-freien universellen Turing-Maschine hält.

Die angegebenen Ziffern stammen aus einer Arbeit von 2002 von Calude, Dinneen und Shu. Um diese Ziffern zu erhalten, wurden nur die Wahrscheinlichkeiten für Programme bis zu 84 Bit berechnet, aufgrund von algorithmischen Besonderheiten sind die ersten 64 Bit korrekt.

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Borel führte 1909 den Begriff der normalen Zahl ein. Eine Zahl x heisst normal (zur Basis b), wenn alle Ziffernblöcke in der Entwicklung zur Basis b mit derselben Häufigkeit wie auch beim Würfeln auftreten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{\# Ziffernblock innerhalb der ersten } n \text{ Stellen}}{n} = \frac{1}{b^{\text{Anzahl der Ziffern}}}$$

Absolut normale Zahlen sind Zahlen, die bezüglich jeder Basis normal sind.

Borel bewies, dass die meisten reellen Zahlen normal sind. Rationale Zahlen sind nicht normal. Chaitins Konstante ist normal.

Es ist nicht klar, ob π normal ist (z. B. zur Basis 11, vergl. mit dem Roman “Contact” von Carl Sagan, wurde verfilmt mit Jodie Foster).

Irrationalität von e

Euler bewies 1737 (veröffentlicht erst 1744, (Euler, 1744)), dass die nach ihm benannte Zahl e, definiert als der Wert der Exponentialfunktion

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

an der Stelle 1, also

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \approx 2.718281828459045235$$

irrational ist. Sein Beweis basierte auf einem Kettenbruch für e, welcher zuerst 1714 angegeben wurde von Roger Cotes (Cotes, 1714, Seite 11).

Nachfolgend ein schöner einfacher Widerspruchsbeweis, in Nicolas Dominique Marie Janot de Stainvilles Buch (de Stainville, 1815) Jean Baptiste Joseph Fourier zugeschrieben, siehe dort die Anmerkung auf Seite 341.

Irrationalität von e

Wir nehmen mit Fourier an, dass

$$2 < e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist ja $e \notin \mathbb{N}$, also sicherlich $q > 1$.

Multiplikation von e mit $q!$ ergibt

$$\mathbb{N} \ni (q-1)!p = q!e = q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Wir zeigen jetzt, dass die Reihe auf der rechten Seite keine natürliche Zahl ergeben kann.

Irrationalität von e

Wir trennen die Reihe in einen ganzzahligen und einen kleinen Teil,

$$q!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}+\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!}.$$

In dieser Trennung ist garantiert die vorne stehende Summe ganzzahlig,

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}=q!+\frac{q!}{1}+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\cdots+\frac{q!}{q!}\in\mathbb{N}.$$

Nun zeigen wir, dass der hintere Teil

$$\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!}$$

keine ganze Zahl sein kann, da er zu klein ist.

Irrationalität von e

Die hintere Reihe

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

ist klein (aber nicht Null), denn dank $q > 1$ und $k > q$ gilt

$$0 < \frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+(k-q))} \leqslant \frac{1}{3^{k-q}},$$

wobei das Gleichheitszeichen in dem „$\leqslant$“ nur für $k = q+1$ gelten kann, für alle weiteren Terme gilt dort „$<$“.

Damit folgt

$$0 < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-q}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j}.$$

Irrationalität von e

Die Reihe auf der rechten Seite ist eine geometrische Reihe, es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt nämlich für $|x| < 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} x^j = \lim_{k \to \infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

da offensichtlich

$$(1 - x) \sum_{j=0}^{k} x^j = \sum_{j=0}^{k} x^j - \sum_{j=1}^{k+1} x^j = 1 - x^{k+1}.$$

Irrationalität von e

Insgesamt haben wir gezeigt, dass aus der Annahme, dass $e \in \mathbb{Q}$, der Widerspruch

$$\mathbb{N} \ni q!e = \underbrace{\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}}_{>0,<1} \notin \mathbb{N}$$

folgt, mithin e also irrational ist.

Transzendenz von e

Die Transzendenz von e wurde zuerst 1873 von Charles Hermite gezeigt, (Hermite, 1873), siehe auch (Gel′fond, 1960, Seite 41–44).

Hier geben wir den einfachereren Beweis von David Hilbert aus dem Jahre 1893 (Hilbert, 1893a) wieder, siehe auch (Hurwitz, 1893; Gordan, 1893). Der Beweis basiert wieder auf der Konstruktion eines Widerspruchs.

Sei e algebraisch. Dann gibt es ein Polynom, so dass

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \tag{1}$$

dessen Koeffizienten ganze Zahlen sind, wobei $a \neq 0$ angenommen werden kann, sonst könnte man durch e teilen und ein Polynom einen Grad kleiner betrachten.

Transzendenz von e

Jetzt werden beide Seiten der Gleichung (1), also

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \tag{1}$$

mit dem Integral

$$I_0^\infty := \int_0^\infty x^m \left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right)^{m+1} e^{-x}\, dx \tag{2}$$

für ein später noch genauer bestimmtes $m \in \mathbb{N}$ multipliziert.

Transzendenz von e

Mit der Abkürzung

$$I_j^\infty := \int_j^\infty x^m \left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right)^{m+1} e^{-x}\, dx, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3}$$

seien die „unten abgeschnittenen" Teilintegrale, mit

$$I_0^j := \int_0^j x^m \left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right)^{m+1} e^{-x}\, dx, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{4}$$

die nun fehlenden unteren Teilintegrale bezeichnet.

Es gilt $I_0^\infty = I_0^j + I_j^\infty$ für alle $1 \leqslant j \leqslant n$.

Transzendenz von e

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wie folgt in zwei Teile zerlegt,

$$0 = aI_0^\infty + a_1 e I_0^\infty + a_2 e^2 I_0^\infty + \cdots + a_n e^n I_0^\infty \tag{5}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aI_0^\infty + a_1 e I_1^\infty + a_2 e^2 I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty \\ \qquad + a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} P_1 \\ + P_2 \end{array} \right. \tag{6}$$

Wir werden jetzt zeigen, dass der erste Teil

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1 e I_1^\infty + a_2 e^2 I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

ganzzahlig ist.

Transzendenz von e

Wegen

$$\int_0^\infty x^j e^{-x}\,dx = j! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots j \quad \forall\, j\in\mathbb{N}$$

ist auch

$$\begin{aligned} I_0^\infty &= \int_0^\infty x^m\left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right)^{m+1} e^{-x}\,dx \\ &= \int_0^\infty x^{m+n(m+1)}e^{-x}+\cdots+(-1)^{n(m+1)}(n!)^{m+1}x^m e^{-x}\,dx \\ &= (m+n(m+1))!+\cdots+(-1)^{n(m+1)}(n!)^{m+1}(m!) \end{aligned}$$

eine ganze Zahl, überdies durch $m!$ teilbar.

Teilung durch $(m+1)!$ ergibt den Rest $\pm(n!)^{m+1}$, welcher nicht Null ist, falls $m+1$ eine Primzahl größer als n ist.

Transzendenz von e

Die anderen Integrale multipliziert mit der entsprechenden Potenz in e sind wiederum ganzzahlig und haben sogar mindestens den Teiler $(m+1)!$, da

$$e^j I_j^\infty = e^j \int_j^\infty x^m \left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right)^{m+1} e^{-x}\,dx, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

nach der Variablensubstitution

$$x = z + j, \quad \frac{dx}{dz} = 1, \quad e^{-x} = e^{-z-j} = e^{-z}e^{-j}$$

die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} e^j I_j^\infty &= \int_0^\infty (z+j)^m \left((z+j-1)(z+j-2)\cdots(z+j-n)\right)^{m+1} e^{-z}\,dz \\ &= \int_0^\infty z^{m+n(m+1)} + \cdots + \\ &\qquad j^m \left((j-1)(j-2)\cdots(1)(-1)(-2)\cdots(j-n)\right)^{m+1} z^{m+1} e^{-z}\,dz. \end{aligned}$$

Transzendenz von e

Zusammengefasst ist

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1 e I_1^\infty + a_2 e^2 I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

aufgrund dieser Überlegungen ganzzahlig, da sowohl a und I_0^∞ als auch alle a_j und alle I_j^∞ ganzzahlig sind. Weiterhin ist jeder Summand durch $m!$ teilbar, da I_0^∞ durch $m!$ teilbar ist, und die anderen I_j^∞ sogar durch $(m+1)!$ teilbar sind.

Damit, und da

$$\frac{aI_0^\infty}{m!} = (-1)^{n(m+1)} a (n!)^{m+1}$$

gilt, folgt

$$\frac{P_1}{m!} = (-1)^{n(m+1)} a (n!)^{m+1} \pmod{m+1}.$$

Transzendenz von e

Jetzt zeigen wir, dass die Division des zweiten Teiles

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

durch $m!$ für grosse Primzahlen $m+1$ beliebig klein werden kann.

Dazu schätzen wir die Hilfsfunktionen auf dem Intervall $[0, n]$ wie folgt ab:

$$|x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| \leqslant K := \max_{x\in[0,n]} |x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| < n^{n+1}$$

$$|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| \leqslant k := \max_{x\in[0,n]} |(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| < n^n$$

Damit gilt dann für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$|I_0^\ell| = \left| \int_0^\ell x^m \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n) \Big)^{m+1} e^{-x}\, dx \right| < \ell k K^m.$$

Transzendenz von e

Aus der Darstellung

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

und der Abschätzung

$$\left|I_0^\ell\right| < \ell k K^m$$

folgt leicht die Abschätzung

$$\begin{aligned} |P_2| &\leqslant |a_1 e||I_0^1| + |a_2 e^2||I_0^2| + \cdots + |a_n e^n||I_0^n| \\ &< \underbrace{(|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \cdots + n|a_n e^n|)k}_{=:c} K^m. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left|\frac{P_2}{m!}\right| < \frac{cK^m}{m!}.$$

Transzendenz von e

Wir haben jetzt gezeigt, dass sowohl

$$0 = \frac{P_1}{m!} + \frac{P_2}{m!},$$

als auch, dass für Primzahlen $m + 1 > n$, $m + 1 > a$

$$\frac{P_1}{m!} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

und dass für genügend grosse m

$$\left|\frac{P_2}{m!}\right| < \frac{cK^m}{m!} < 1.$$

Daraus folgt der Widerspruch.

Irrationalität von π

Der erste Beweis der Irrationalität von π stammt von Johann Heinrich Lambert aus dem Jahre 1766. Er schrieb zuerst darüber ein Kapitel

> *„Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“*

im zweiten 1770 veröffentlichten Band seiner

> *„Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“, (Lambert, 1770).*

Wenige Monate später legte er die 1768 veröffentlichte Arbeit

> *„Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques“, (Lambert, 1768)*

bei der „Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin“ mit dem endgültigen Resultat vor.

Irrationalität von π

Lamberts Beweis basiert auf der Entwicklung gewisser trigonometrischer Funktionen als Kettenbrüche und deren Eigenschaften. Dieser Beweis ist für (werdende) Erstsemester nicht so leicht zugänglich.

Wir geben hier den kurzen Beweis nach Ivan Niven von 1947 (Niven, 1947) wieder.

Irrationalität von π

Angenommen, es sei $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

Es seien Polynome f und F für ein später bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \\ F(x) &:= f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x). \end{aligned}$$

Erste Beobachtung: Unter der Annahme $\pi = a/b$ gilt

$$f(x) = f(a/b - x) = f(\pi - x).$$

Zweite Beobachtung: Das Polynom f (und damit auch das Polynom F) hat an der Stelle Null (und damit auch bei π) nur ganzzahlige Ableitungen,

$$f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Irrationalität von π

Dritte Beobachtung:

$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\right) = F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) = f(x)\sin(x).$$

Vierte Beobachtung:

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = \left[F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits: Für $0 < x < \pi$ gilt logischerweise die Abschätzung

$$0 < f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Jetzt kann man aber zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite für grosse $n \in \mathbb{N}$ beliebig klein gemacht werden kann, also insbesondere kleiner als $1/\pi$.

Transzendenz von π

Von 1882 stammt Lindemanns Beweis, dass die Kreiszahl π eine transzendente Zahl ist (Lindemann, 1882b; Lindemann, 1882a), siehe auch (Weierstrass, 1885).

Mit diesem Beweis lieferte Lindemann die negative Antwort auf die alte griechische Aufgabenstellung der Quadratur des Kreises.

Der nachfolgende Beweis ist der vereinfachte Beweis von David Hilbert von 1893 (Hilbert, 1893a).

Transzendenz von π

Im Brückenkurs haben Sie gelernt, dass mit der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}$ die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt.

Jetzt konstruiert man, ausgehend von der Annahme, dass $\alpha_1 = i\pi$ algebraisch vom Grad n ist, mit den anderen Nullstellen $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entsprechnenden Polynomes vom Grade n den Ausdruck

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N},$$

wobei $N = 2^{n-1}$.

Wie man schnell nachrechnet, sind die β_i Summen der α_j, es gilt

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \ldots \quad \beta_n = \alpha_n, \quad \beta_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \ldots \quad \beta_N = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Transzendenz von π

Also sind die β_i die Nullstellen der Polynome

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n),\\
p_2(z) &= (z-\alpha_1-\alpha_2)(z-\alpha_1-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_{n-1}-\alpha_n),\\
p_3(z) &= (z-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(z-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)\cdots(z-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}-\alpha_n),\\
&\ \ \vdots\\
p_n(z) &= z-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j.
\end{aligned}$$

Nun ist aber gerade $p_1(z)$ bis auf die fehlende Skalierung mit dem Faktor bei der höchsten Potenz n nach unserer Vorraussetzung ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten.

Transzendenz von π

Wir betrachten das erste Polynom etwas genauer. Sei unser ganzzahliges Polynom gegeben als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i) = a_n p_1(z).$$

Dann sind die ersten beiden Koeffizienten gegeben als

$$a_0 = a_n (-1)^n \prod_{i=1} \alpha_i, \quad a_1 = a_n (-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-1}},$$

alle weiteren durch

$$a_j = a_n (-1)^{n-j} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-j} \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-j}}.$$

Transzendenz von π

Die hierbei auftretenden Terme

$$\sigma_j := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-j} \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-j}} = (-1)^{n-j} \frac{a_j}{a_n}$$

sind somit alle rational.

Man sieht sofort, dass alle σ_j sich nicht ändern, wenn man die Reihenfolge der α_i ändert. Daher nennt man diese auch (elementar-)symmetrische Funktionen der „Wurzeln" α_i.

Der sogenannte „Hauptsatz über symmetrische Funktionen" sagt jetzt aus, dass jeder Ausdruck, welcher symmetrisch in den Wurzeln α_i ist, einen rationalen Wert liefert. Ist überdies a_n gleich Eins, so ist solch ein Ausdruck sogar ganzzahlig.

Transzendenz von π

Da das Polynom

$$p(z) := \prod_{i=1}^{n} p_i(z)$$

alle β_i als Nullstellen hat und alle Polynome des Produktes sich unter Vertauschungen der Nullstellen α_i nicht ändern, ist dieses Polynom ein Polynom mit rationalen Koeffizienten.

Wir nehmen mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen v der Nenner mal und erhalten so ein Polynom

$$Z(z) := v \cdot p(z)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten mit Grad $N = 2^{n-1}$, welches die β_i als Nullstellen hat.

Transzendenz von π

Einige der β_i werden eventuell gleich Null sein, diese ergeben in

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N}$$

$1 = e^0$. Alle diese Einsen werden auf den Term 1 aufgeschlagen, es ergibt sich (nach einer Umnummerierung)

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}$$

mit $a \in \mathbb{N}$.

Dieser Umformung entspricht ein Teilen des ganzzahligen Polynomes $Z(z)$ durch den Faktor z^{N-M}, die verbleibenden β_i sind dann die Nullstellen des ganzzahligen Polynomes

$$\frac{Z(z)}{z^{N-M}} = bz^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M = 0, \quad b_M \neq 0.$$

Transzendenz von π

Hilbert definiert als nächstes eine neue Hilfsfunktion, indem er das Polynom mit den nichttrivialen Nullstellen (ganzzahlig) skaliert,

$$g(z) := b^M \frac{Z(z)}{z^{N-M}} = b^M (bz^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M).$$

Anschliessend betrachtet er wieder Integrale, dieses Mal multipliziert er

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}$$

mit dem Integral

$$J_0^\infty := \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z}\, dz.$$

Analog werden die abgeschnittenen Integrale $J_{\beta_i}^\infty$ und die Integrale $J_0^{\beta_i}$ definiert, wobei dieses Mal die Integrale komplexe Kurvenintegrale sind, da die β_i zumindest teilweise komplexe Zahlen sein werden.

Transzendenz von π

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wieder wie folgt in zwei Teile zerlegt,

$$0 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1}J_0^\infty + e^{\beta_2}J_0^\infty + \cdots + e^{\beta_M}J_0^\infty \tag{7}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} aJ_0^\infty + e^{\beta_1}J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}J_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M}J_{\beta_M}^\infty \\ + e^{\beta_1}J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}J_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}J_0^{\beta_M} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} Q_1 \\ + Q_2 \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Es zeigt sich, dass wieder Q_1 ganzzahlig ungleich Null und Q_2 „zu“ klein ist.

Dazu wird wieder eine Variablensubstitution durchgeführt: Unter Verwendung von

$$z = \hat{z} + \beta_i$$

folgt

$$e^{\beta_i}J_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}}\, d\hat{z} = (m+1)!G(\beta_i).$$

Transzendenz von π

Die durch

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}}\, d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

definierte Funktion G ist offensichtlich eine ganzzahlige Funktion von β_i.
Weiterhin ist wegen

$$0 = g(\beta_i) = b^M (b\beta_i^M + b_1 \beta_i^{M-1} + \cdots + b_M)$$

und

$$\begin{aligned} g(\hat{z} + \beta_i) &= b^M (b(\hat{z} + \beta_i)^M + b_1 (\hat{z} + \beta_i)^{M-1} + \cdots + b_M) \\ &= b^M (b\beta_i^M + b_1 \beta_i^{M-1} + \cdots + b_M) + R(\hat{z}, \beta_i) \end{aligned}$$

G als Polynom in β_i vom Höchstgrad $m + (M-1)(m+1) = mM + M$.

Transzendenz von π

Da $g(\hat{z}+\beta_i)$ als Polynom in β_i den Höchstfaktor b^M enthält, enthält das in β_i ganzzahlige Polynom G vom Grad $mM+M$ wegen

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z}+\beta_i)^m (g(\hat{z}+\beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}}\, d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

den Höchstfaktor b^{mM+M} und läßt sich, da b^{mM+M} ein Teiler aller Koeffizienten von G ist, mit einem anderen ganzzahligen Polynom $\tilde{G}$ mit Höchstkoeffizienten Eins schreiben als $G(\beta_i) = \tilde{G}(b\beta_i)$.

Damit ist die Summe

$$\begin{aligned} e^{\beta_1} J_{\beta_1}^{\infty} + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^{\infty} + \cdots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^{\infty} \\ = (m+1)! \left(\tilde{G}(b\beta_1) + \tilde{G}(b\beta_2) + \cdots + \tilde{G}(b\beta_M) \right) \end{aligned}$$

notwendig nach dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen eine durch $(m+1)!$ teilbare ganze Zahl.

Transzendenz von π

Der fehlende erste Term in der Summe Q_1,

$$Q_1 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty,$$

ist natürlich auch wieder ganzzahlig, eine genauere Analyse zeigt, dass er die Form

$$\begin{aligned} aJ_0^\infty &= a \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z}\, dz \\ &= a \int_0^\infty b^{(M+1)(m+1)} z^{m+M(m+1)} e^{-z} + \cdots + (g(0))^{m+1} z^m\, dz \\ &= a \left(b^{(M+1)(m+1)} (m + M(m+1))! + \cdots + (b^M b_M)^{m+1} m! \right) \end{aligned}$$

hat, also nach Teilen mit Rest die Form

$$\frac{aJ_0^\infty}{m!} = ab^{mM+M} b_M^{m+1} \pmod{m+1}.$$

Transzendenz von π

Insgesamt gilt daher also

$$\begin{aligned}\frac{Q_1}{m!} &= \frac{aJ_0^\infty + e^{\beta_1}J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}J_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M}J_{\beta_M}^\infty}{m!}\\ &= \frac{a\left(b^{(M+1)(m+1)}(m+M(m+1))! + \cdots + (b^M b_M)^{m+1}m!\right)}{m!}\\ &\quad + \frac{(m+1)!}{m!}\left(\tilde{G}(b\beta_1) + \tilde{G}(b\beta_2) + \cdots + \tilde{G}(b\beta_M)\right)\\ &= ab^{mM+M}b_M^{m+1} \pmod{m+1}.\end{aligned}$$

Wenn jetzt $m+1$ eine Primzahl größer als a, b und b_M ist, so ist

$$\mathbb{Z} \ni \frac{Q_1}{m!} \neq 0.$$

Transzendenz von π

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Term Q_2 zu,

$$Q_2 = e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}.$$

Die Integrale werden wieder durch Maxima auf den geraden Strecken zwischen Null und β_j (in $\mathbb{C}$) abgeschätzt,

$$|zg(z)| \leqslant E := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0,\beta_j]} |zg(z)|,$$

$$|g(z)e^{-z}| \leqslant e := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0,\beta_j]} |g(z)e^{-z}|,$$

es gilt

$$|J_0^{\beta_j}| = \left| \int_0^{\beta_j} z^m (g(z))^{m+1} e^{-z}\, dz \right| < |\beta_i| e E^m.$$

Transzendenz von π

Damit ist aber Q_2 beschränkt durch

$$\left|\frac{Q_2}{m!}\right| = \left|\frac{e^{\beta_1}J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}J_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}J_0^{\beta_M}}{m!}\right| \leqslant \frac{\overbrace{\left(|\beta_1 e^{\beta_1}| + \cdots + |\beta_M e^{\beta_M}|\right) e}^{C}\, E^m}{m!}.$$

Wieder können wir m so gross wählen, dass dieser Ausdruck kleiner als Eins wird und damit die Gleichung

$$0 = \frac{Q_1}{m!} + \frac{Q_2}{m!}$$

unmöglich zu erfüllen ist.

Demnach ist die Zahl π transzendent. Das beweist die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal.

Fazit

Jeder, der π nur auf dem Rechner als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. 16 Dezimalstellen, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Auch interessant, aber hier nicht bewiesen: Die Zahl $e^{\pi} = (-1)^{-i} = (-1)^{-\sqrt{-1}}$ ist ebenfalls transzendent.

Leider ist nicht mehr genug Zeit um dieses interessante Gebiet hinreichend zu vertiefen . . .

Danke für die Aufmerksamkeit! War nett, mal wieder die Erstsemester verschaukeln zu dürfen `;-)`

Cotes, R. (1714).
Logometria.
Philosophical Transactions, XXIX:5–45.
Die einzige Veröffentlichung von Roger Cotes zu Lebzeiten.
http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1714.0002

de Stainville, J. (1815).
Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie.
Ve Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.
http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/melange-danalyse-algebrique-et-de-geometrie

Euler, L. (1744).
De fractionibus continuis. Dissertatio.
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 9:98–137.
http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E071.html

Gardner, M. (1975a).
Mathematical Games: Six sensational discoveries that somehow or another escaped public attention.
Scientific American, 232:127–131.
Aprilscherz.

Gardner, M. (1975b).
Mathematical Games: On tessellating the plane with convex polygons.
Scientific American, 232:112–117.
Enthält Kommentar zum vorangegangenen Aprilscherz.

Gel′fond, A. O. (1960).
Transcendental and algebraic numbers.
Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. Dover Publications Inc., New York.

Gordan, P. (1893).
Transcendenz von e und π.
Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):222–224.
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254581

Heegner, K. (1952).
Diophantische Analysis und Modulfunktionen.
Mathematische Zeitschrift, 56:227–253.
http://dx.doi.org/10.1007/BF01174749

Hermite, C. (1859).
Sur la théorie des équations modulaires.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 49:16–24, 110–118, 141–144.
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3006f

Hermite, C. (1873).
Sur la fonction exponentielle.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 77:18–24.
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3034n

Hilbert, D. (1893a).
Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π.
Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):216–219.
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254565

Hilbert, D. (1893b).
Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π.
Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 1893(2):113–116.
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002526492

Hurwitz, A. (1893).
Beweis der Transcendenz der Zahl e.
Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):220–221.
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254573

Lambert, J. H. (1768).
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques.
Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, XVII(Année MDCCLXI):265–322.
Der Band zum Jahr 1761 (MDCCLXI) wurde 1768 herausgegeben.
http://www.kuttaka.org/~JHL/L1768b.html

Lambert, J. H. (1770).
Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.
Number II in Theil. Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin.
Siehe Vorrede und Kapitel Fünf.
http://www.kuttaka.org/~JHL/L1770a.html

Lindemann, F. (1882b).
Ueber die Zahl π.
Mathematische Annalen, XX(2):213–225.
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002246910

Lindemann, F. (1882a).
Über die Ludolph'sche Zahl.
Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1882(Zweiter Halbband. Juni bis December):679–682.
http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=10-sitz/1882-2&seite:int=102

Liouville, J. (1844a).
Mémoires et communications des membres et des correspondants de l'académie.
Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, XVIII(20):883–885.
Séance du Lundi 13 Mai 1844.
http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/propos-de-lexistence-des-nombres-transcendants

Liouville, J. (1844b).
Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance.
Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, XVIII(20):910–911.
Théorie des Nombres.

Liouville, J. (1851).
Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Série 1, 16:133–142.
http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1851_1_16_A5_0

Lützen, J. (1990).
Joseph Liouville 1809–1882: master of pure and applied mathematics, Volume 15 of *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*.
Springer-Verlag, New York.

Niven, I. (1947).
A simple proof that π is irrational.
Bulletin of the American Mathematical Society, 53:509.
http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08821-2

Ramanujan, S. (1913–1914).
Modular equations and approximations to π.
Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 45:350–372.

Turing, A. M. (1937).
On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.
Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, XLII(1):230–265.
http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230

Turing, A. M. (1938).
On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction.
Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 43(1):544–546.
http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-43.6.544

Weber, H. (1908).
Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen, Dritter Band des *Lehrbuch der Algebra*.
F. Vieweg, Braunschweig, Zweite Auflage.
http://www.archive.org/details/lehrbuchderalgeb03webeuoft

Weierstrass, K. (1885).
Zu Hrn. Lindemann's Abhandlung: „Über die Ludolph'sche Zahl".
Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1885(Zweiter Halbband, Juni bis December):919, 1067–1085.
http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=10-sitz/1885-2&seite:int=403