

Zur Quadratur des Kreises

— oder —

„Das Runde muss in das Eckige“

Jens-Peter M. Zemke
zemke@tu-harburg.de

Institut für Numerische Simulation
Technische Universität Hamburg-Harburg

19.10.2009 — Studiendekanat ET/IT
20.10.2009 — Studiengänge AIW/LUM

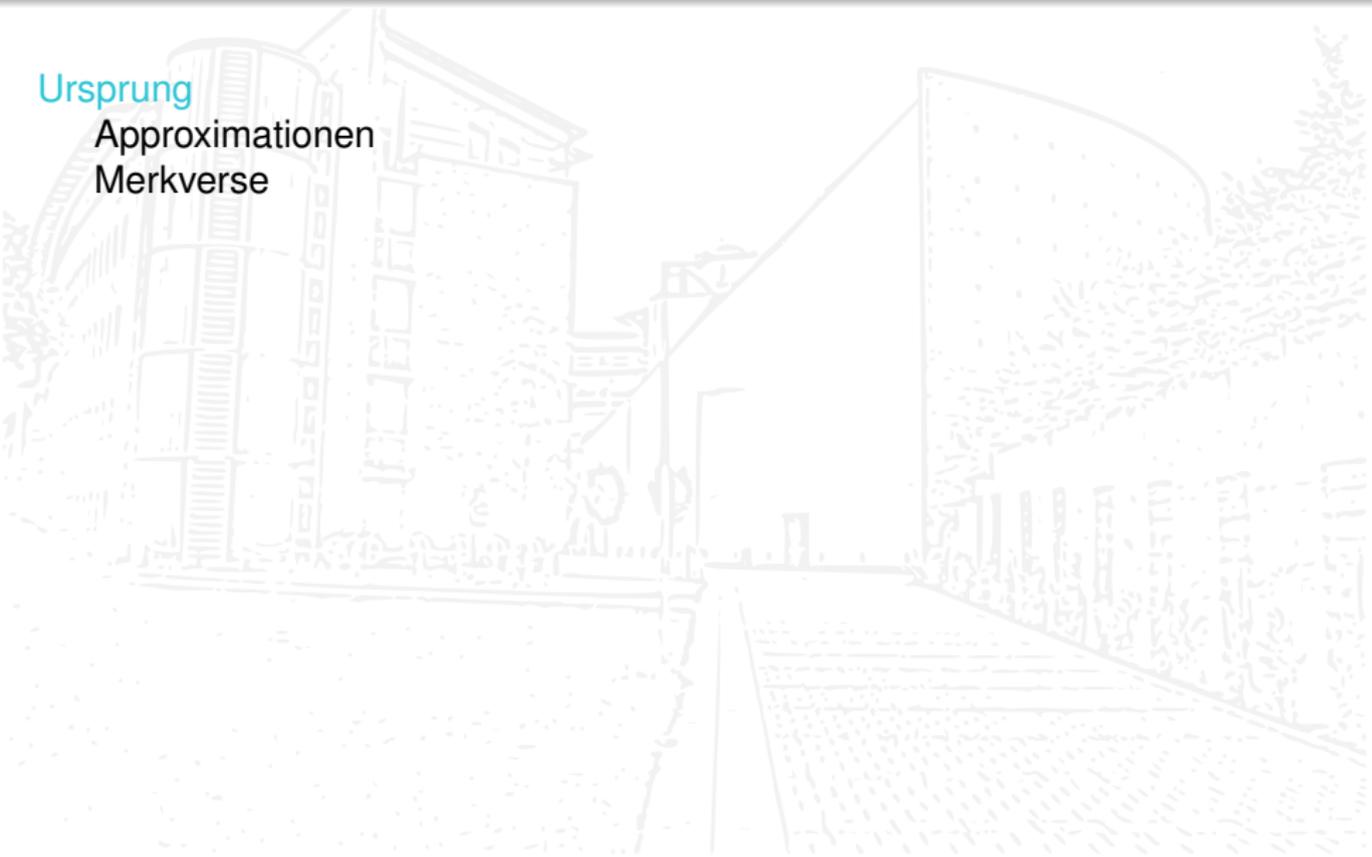


Übersicht

Ursprung

Approximationen

Merkverse



Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolfsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Übersicht

Ursprung

Approximationen

Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Irrationale und konstruierbare Zahlen

Algebraische und transzendente Zahlen

Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

Die Irrationalität von e

Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

Die Irrationalität von π

Die Transzendenz von π

Ursprung

Bereits die Geometer der Ägypter, Babylonier, Inder und Griechen bemerkten, dass das Verhältnis des Umfanges eines Kreises (heutzutage geschrieben als $2\pi r$) zu seinem Durchmesser (also $2r$) **unabhängig** von seinem Durchmesser ist und **etwas größer ist als 3**.

Ursprung

Bereits die Geometer der Ägypter, Babylonier, Inder und Griechen bemerkten, dass das Verhältnis des Umfanges eines Kreises (heutzutage geschrieben als $2\pi r$) zu seinem Durchmesser (also $2r$) **unabhängig** von seinem Durchmesser ist und **etwas größer ist als 3**.

Die Problemstellung der „**Quadratur des Kreises**“ wurde von dem griechischen Philosophen **Anaxagoras** (aus)formuliert, als sich dieser, angeklagt wegen Asebie (Gottlosigkeit), um das Jahr 430 v. Chr. im „Gefängnis“ befand.

Ursprung

Bereits die Geometer der Ägypter, Babylonier, Inder und Griechen bemerkten, dass das Verhältnis des Umfanges eines Kreises (heutzutage geschrieben als $2\pi r$) zu seinem Durchmesser (also $2r$) **unabhängig** von seinem Durchmesser ist und **etwas größer ist als 3**.



Die Problemstellung der „**Quadratur des Kreises**“ wurde von dem griechischen Philosophen **Anaxagoras** (aus)formuliert, als sich dieser, angeklagt wegen Asebie (Gottlosigkeit), um das Jahr 430 v. Chr. im „Gefängnis“ befand.

Ursprung

Bereits die Geometer der Ägypter, Babylonier, Inder und Griechen bemerkten, dass das Verhältnis des Umfanges eines Kreises (heutzutage geschrieben als $2\pi r$) zu seinem Durchmesser (also $2r$) **unabhängig** von seinem Durchmesser ist und **etwas größer ist als 3**.



Die Problemstellung der „**Quadratur des Kreises**“ wurde von dem griechischen Philosophen **Anaxagoras** (aus)formuliert, als sich dieser, angeklagt wegen Asebie (Gottlosigkeit), um das Jahr 430 v. Chr. im „Gefängnis“ befand. Er hatte die Sonne für einen glühenden Stein, größer als die Peloponnes, der unter anderem mit seinem Licht dafür Sorge, dass der Mond scheine, und nicht für einen Gott gehalten.

(Quelle: Wikipedia)

Approximationen von π

Es gibt viele **Approximationen** für die Zahl π . Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine **Art von Zahl** π denn sei.

Approximationen von π

Es gibt viele **Approximationen** für die Zahl π . Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine **Art von Zahl** π denn sei.

In der **Bibel** ist folgende Approximation zu finden: Im ersten Buch Könige 7:23–26, siehe auch zweite Chronik 4:2–5, steht implizit, dass π drei ist.

Approximationen von π

Es gibt viele **Approximationen** für die Zahl π . Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine **Art von Zahl** π denn sei.

In der **Bibel** ist folgende Approximation zu finden: Im ersten Buch Könige 7:23–26, siehe auch zweite Chronik 4:2–5, steht implizit, dass π drei ist.

Im **Papyrus Rhind** steht die Approximation $(16/9)^2 \approx 3.16049$.

Approximationen von π

Es gibt viele **Approximationen** für die Zahl π . Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine **Art von Zahl** π denn sei.

In der **Bibel** ist folgende Approximation zu finden: Im ersten Buch Könige 7:23–26, siehe auch zweite Chronik 4:2–5, steht implizit, dass π drei ist.

Im **Papyrus Rhind** steht die Approximation $(16/9)^2 \approx 3.16049$.

Archimedes leitete sehr früh **Schranken** für π her:

$$3.1408 \approx \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

Approximationen von π

Es gibt viele **Approximationen** für die Zahl π . Lange Zeit war das alles, was gebraucht wurde. Erst die Griechen begannen sich zu fragen, was für eine **Art von Zahl** π denn sei.

In der **Bibel** ist folgende Approximation zu finden: Im ersten Buch Könige 7:23–26, siehe auch zweite Chronik 4:2–5, steht implizit, dass π drei ist.

Im **Papyrus Rhind** steht die Approximation $(16/9)^2 \approx 3.16049$.

Archimedes leitete sehr früh **Schranken** für π her:

$$3.1408 \approx \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

Maple spuckt (unter Verwendung von `Digits:=50;`) die Approximation

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751$$

aus.

Übersicht

Ursprung

Approximationen

Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Irrationale und konstruierbare Zahlen

Algebraische und transzendente Zahlen

Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

Die Irrationalität von e

Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

Die Irrationalität von π

Die Transzendenz von π

Approximationen von π

Wer soll sich das denn merken?

Im **Russischen** gibt es z. B. diesen Merkvers:

«Што(3) я(1) знаю(4) о(1) кругах(6)»

Approximationen von π

Wer soll sich das denn merken?

Im **Russischen** gibt es z. B. diesen Merkvers:

«Што(3) я(1) знаю(4) о(1) кругах(6)»

Im **Deutschen** z. B. diesen Merkvers:

„Wie(3), o(1) dies(4) π (1) macht(5) ernstlich(9) so(2) vielen(6)
viele(5) Müh(3), Lernt(5) immerhin(8), Jünglinge(9), leichte(7)
Verselein(9), wie(3) so(2) zum(3) Beispiel(8) dies(4) dürfte(6) zu(2)
merken(6) sein(4)!“

Approximationen von π

Wer soll sich das denn merken?

Im **Russischen** gibt es z. B. diesen Merkvers:

«Што(3) я(1) знаю(4) о(1) кругах(6)»

Im **Deutschen** z. B. diesen Merkvers:

„Wie(3), o(1) dies(4) π (1) macht(5) ernstlich(9) so(2) vielen(6)
viele(5) Müh(3), Lernt(5) immerhin(8), Jünglinge(9), leichte(7)
Verselein(9), wie(3) so(2) zum(3) Beispiel(8) dies(4) dürfte(6) zu(2)
merken(6) sein(4)!“

Wer lieber **Geschichtsdaten** parat hat:

„Drei Komma (Hus verbrannt) und (Brennabor) bringen die Zahl Pi
hervor.“

Approximationen von π

Wer soll sich das denn merken?

Im **Russischen** gibt es z. B. diesen Merkvers:

«Што(3) я(1) знаю(4) о(1) кругах(6)»

Im **Deutschen** z. B. diesen Merkvers:

„Wie(3), o(1) dies(4) π (1) macht(5) ernstlich(9) so(2) vielen(6)
viele(5) Müh(3), Lernt(5) immerhin(8), Jünglinge(9), leichte(7)
Verselein(9), wie(3) so(2) zum(3) Beispiel(8) dies(4) dürfte(6) zu(2)
merken(6) sein(4)!“

Wer lieber **Geschichtsdaten** parat hat:

„Drei Komma (Hus verbrannt) und (Brennabor) bringen die Zahl Pi
hervor.“

Johannes Hus wurde 1415 verbrannt, Brennabor (lateinisch für Brandenburg) wurde 926 zerstört.

Übersicht

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun?

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Man sieht sofort: Es gibt gleichviele Zahlen in \mathbb{Z} und \mathbb{N} , eine eindeutige Nummerierung ist möglich.

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Man sieht sofort: Es gibt gleichviele Zahlen in \mathbb{Z} und \mathbb{N} , eine eindeutige Nummerierung ist möglich.

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ werden mittels \mathbb{N} und \mathbb{Z} definiert. Ist π eventuell rational?

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Man sieht sofort: Es gibt gleichviele Zahlen in \mathbb{Z} und \mathbb{N} , eine eindeutige Nummerierung ist möglich.

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ werden mittels \mathbb{N} und \mathbb{Z} definiert. Ist π eventuell rational? **Nein**, aber: Wer hier kann das **beweisen**?

Klassifizierung von Zahlen

Wie gross ist π denn nun? Anders gefragt: **Was für eine Art Zahl ist π ?**

Sie kennen: **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, definiert durch die Peano-Axiome. Die Zahl π ist keine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Die Zahl π ist auch keine ganze Zahl.

Man sieht sofort: Es gibt gleichviele Zahlen in \mathbb{Z} und \mathbb{N} , eine eindeutige Nummerierung ist möglich.

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ werden mittels \mathbb{N} und \mathbb{Z} definiert. Ist π eventuell rational? **Nein**, aber: Wer hier kann das **beweisen**?

Es gibt auch gleichviele Zahlen in \mathbb{Q} und \mathbb{N} , eine eindeutige Nummerierung ist wieder möglich, dieses ist Cantors erstes Diagonalargument.

Klassifizierung von Zahlen

Als nächstes lernt man die **reellen Zahlen** kennen. Diese werden definiert als Grenzwerte einer Intervallschachtelung, mittels Dedekindscher Schnitte oder als Grenzwerte von Cauchy-Folgen.

Klassifizierung von Zahlen

Als nächstes lernt man die **reellen Zahlen** kennen. Diese werden definiert als Grenzwerte einer Intervallschachtelung, mittels Dedekindscher Schnitte oder als Grenzwerte von Cauchy-Folgen.

Die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{R} sind nicht gleichmächtig, es gibt keine eindeutige Nummerierung der reellen Zahlen. Dieses ist die sogenannte Überabzählbarkeit der reellen Zahlen; der Beweis erfolgt über Cantors zweites Diagonalargument.

Klassifizierung von Zahlen

Als nächstes lernt man die **reellen Zahlen** kennen. Diese werden definiert als Grenzwerte einer Intervallschachtelung, mittels Dedekindscher Schnitte oder als Grenzwerte von Cauchy-Folgen.

Die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{R} sind nicht gleichmächtig, es gibt keine eindeutige Nummerierung der reellen Zahlen. Dieses ist die sogenannte Überabzählbarkeit der reellen Zahlen; der Beweis erfolgt über Cantors zweites Diagonalargument.

Die Zahl π ist **reell**, Archimedes hat als erster eine Folge von ineinander enthaltenen Intervallen konstruiert, welche alle π enthalten und deren Intervallenden gegeneinander konvergieren und damit eine reelle Zahl definieren.

Klassifizierung von Zahlen

Als nächstes lernt man die **reellen Zahlen** kennen. Diese werden definiert als Grenzwerte einer Intervallschachtelung, mittels Dedekindscher Schnitte oder als Grenzwerte von Cauchy-Folgen.

Die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{R} sind nicht gleichmächtig, es gibt keine eindeutige Nummerierung der reellen Zahlen. Dieses ist die sogenannte Überabzählbarkeit der reellen Zahlen; der Beweis erfolgt über Cantors zweites Diagonalargument.

Die Zahl π ist **reell**, Archimedes hat als erster eine Folge von ineinander enthaltenen Intervallen konstruiert, welche alle π enthalten und deren Intervallenden gegeneinander konvergieren und damit eine reelle Zahl definieren.

Es gibt weitere Erweiterungen: Komplexe Zahlen \mathbb{C} , (Hamiltonsche) Quaternionen \mathbb{H} , die Cayley-Zahlen oder Oktonionen \mathbb{O} . Andere hyperkomplexe Erweiterungen der reellen Zahlen, die Non-Standard-Zahlen von Robinson ...

Übersicht

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen**
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Klassifizierung von Zahlen

Was ist mit den Zahlen in \mathbb{R} , welche nicht in \mathbb{Q} sind? (Und derer gibt es viele, nämlich viel viel mehr als es Zahlen in \mathbb{Q} gibt.) Diese sind die sogenannten **irrationalen Zahlen**.

Klassifizierung von Zahlen

Was ist mit den Zahlen in \mathbb{R} , welche nicht in \mathbb{Q} sind? (Und derer gibt es viele, nämlich viel viel mehr als es Zahlen in \mathbb{Q} gibt.) Diese sind die sogenannten **irrationalen Zahlen**.

Dass eine Zahl eine irrationale Zahl ist, beweist man meist mittels eines Widerspruchsbeweises.

Klassifizierung von Zahlen

Was ist mit den Zahlen in \mathbb{R} , welche nicht in \mathbb{Q} sind? (Und derer gibt es viele, nämlich viel viel mehr als es Zahlen in \mathbb{Q} gibt.) Diese sind die sogenannten **irrationalen Zahlen**.

Dass eine Zahl eine irrationale Zahl ist, beweist man meist mittels eines Widerspruchsbeweises.

Wir zeigen exemplarisch: Alle Zahlen der Form $\pm\sqrt{p}$ mit einer Primzahl p sind nicht rational, also irrational.

Klassifizierung von Zahlen

Was ist mit den Zahlen in \mathbb{R} , welche nicht in \mathbb{Q} sind? (Und derer gibt es viele, nämlich viel viel mehr als es Zahlen in \mathbb{Q} gibt.) Diese sind die sogenannten **irrationalen Zahlen**.

Dass eine Zahl eine irrationale Zahl ist, beweist man meist mittels eines Widerspruchsbeweises.

Wir zeigen exemplarisch: Alle Zahlen der Form $\pm\sqrt{p}$ mit einer Primzahl p sind nicht rational, also irrational.

Denn anderenfalls sei der gekürzte Bruch

$$\pm\sqrt{p} = \frac{z}{n} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{z^2}{n^2} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n^2 p = z^2$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben.

Klassifizierung von Zahlen

Wegen

$$n^2 p = z^2$$

muss aber p in der **eindeutigen Primfaktorzerlegung** von z^2 enthalten sein.

Klassifizierung von Zahlen

Wegen

$$n^2 p = z^2$$

muss aber p in der **eindeutigen Primfaktorzerlegung** von z^2 enthalten sein.

Da aber die Primfaktorzerlegung von z^2 aus der von z nach

$$z = \prod_{k=1}^m p_k^{j_k} \Rightarrow z^2 = \prod_{k=1}^m p_k^{2j_k}$$

folgt, muss z^2 sogar durch p^2 teilbar sein.

Klassifizierung von Zahlen

Wegen

$$n^2 p = z^2$$

muss aber p in der **eindeutigen Primfaktorzerlegung** von z^2 enthalten sein.

Da aber die Primfaktorzerlegung von z^2 aus der von z nach

$$z = \prod_{k=1}^m p_k^{j_k} \Rightarrow z^2 = \prod_{k=1}^m p_k^{2j_k}$$

folgt, muss z^2 sogar durch p^2 teilbar sein.

Also ist

$$\frac{n^2}{p} = \frac{z^2}{p^2} \in \mathbb{N},$$

also hat n^2 den **Primfaktor** p .

Klassifizierung von Zahlen

Demnach hat n^2 den Primfaktor p , und demzufolge nach dem vorherigen Argument sogar den Primfaktor p^2 .

Klassifizierung von Zahlen

Demnach hat n^2 den Primfaktor p , und demzufolge nach dem vorherigen Argument sogar den Primfaktor p^2 .

Also kann man sowohl z als auch n durch p^2 teilen, was einen **Widerspruch zur Annahme**, dass der Bruch gekürzt war, darstellt.

Klassifizierung von Zahlen

Demnach hat n^2 den Primfaktor p , und demzufolge nach dem vorherigen Argument sogar den Primfaktor p^2 .

Also kann man sowohl z als auch n durch p^2 teilen, was einen **Widerspruch zur Annahme**, dass der Bruch gekürzt war, darstellt.

Sind denn diese (einfachen) Wurzeln alles, was neu hinzukommt, um aus \mathbb{Q} die Menge \mathbb{R} zu erhalten?

Klassifizierung von Zahlen

Demnach hat n^2 den Primfaktor p , und demzufolge nach dem vorherigen Argument sogar den Primfaktor p^2 .

Also kann man sowohl z als auch n durch p^2 teilen, was einen **Widerspruch zur Annahme**, dass der Bruch gekürzt war, darstellt.

Sind denn diese (einfachen) Wurzeln alles, was neu hinzukommt, um aus \mathbb{Q} die Menge \mathbb{R} zu erhalten?

Eine interessante Erweiterung der rationalen Zahlen sind die sogenannten **konstruierbaren Zahlen**, welche die eben genannten irrationalen Zahlen $\pm\sqrt{p}$ umfassen.

Klassifizierung von Zahlen

Dabei handelt es sich um eine Idee der griechischen Geometer. Nur Zahlen sind interessant, welche unter Verwendung eines **Lineals und eines Zirkels** als Strecken konstruiert werden können, ausgehend von einer Strecke mit Einheitslänge.

Klassifizierung von Zahlen

Dabei handelt es sich um eine Idee der griechischen Geometer. Nur Zahlen sind interessant, welche unter Verwendung eines **Lineals und eines Zirkels** als Strecken konstruiert werden können, ausgehend von einer Strecke mit Einheitslänge.

Die Griechen glaubten lange, dass alle Strecken „**kommensurabel**“ seien, also mit einem gleichen Maß meßbar seien. Die obige Konstruktion und etwas Nachdenken ergibt aber sofort, dass bereits ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit Kathetenlängen Eins dieser Annahme widerspricht, da dann die Hypotenuse die nicht rationale Länge $\sqrt{2}$ hat.

Klassifizierung von Zahlen

Dabei handelt es sich um eine Idee der griechischen Geometer. Nur Zahlen sind interessant, welche unter Verwendung eines **Lineals und eines Zirkels** als Strecken konstruiert werden können, ausgehend von einer Strecke mit Einheitslänge.

Die Griechen glaubten lange, dass alle Strecken „**kommensurabel**“ seien, also mit einem gleichen Maß meßbar seien. Die obige Konstruktion und etwas Nachdenken ergibt aber sofort, dass bereits ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit Kathetenlängen Eins dieser Annahme widerspricht, da dann die Hypotenuse die nicht rationale Länge $\sqrt{2}$ hat.

Anaxagoras formulierte das Problem der **Quadratur des Kreises** denn auch in diesem Rahmen: Die Quadratur des Kreises ist demnach die Aufgabe, nur mittels **Zirkel und Lineal** zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit der **gleichen Fläche** zu konstruieren. Wieder gingen die Griechen von der prinzipiellen Durchführbarkeit dieser Aufgabe aus.

Klassifizierung von Zahlen

Was für Zahlen sind denn nun diese **konstruierbaren Zahlen**?



Klassifizierung von Zahlen

Was für Zahlen sind denn nun diese **konstruierbaren Zahlen**?

Ein „Lineal“ erfüllt Geradengleichungen der Form

$$ax + by = c,$$

meist im Fall $b \neq 0$ in der Schule noch geschrieben mittels der „Steigung“ und dem „y-Achsen-Abschnitt“,

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Klassifizierung von Zahlen

Was für Zahlen sind denn nun diese **konstruierbaren Zahlen**?

Ein „Lineal“ erfüllt Geradengleichungen der Form

$$ax + by = c,$$

meist im Fall $b \neq 0$ in der Schule noch geschrieben mittels der „Steigung“ und dem „y-Achsen-Abschnitt“,

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ein „Zirkel“, ergo, ein Kreis, hier um den Punkt (x_0, y_0) mit Radius r , ist gegeben durch die quadratische Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind **Schnitte von Geraden und Kreisen**, definiert durch die Koordinaten oder Punkte x und y , gegeben bei gleichzeitiger Erfülltheit von Gleichungen von der Form

$$ax + by = c, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind **Schnitte von Geraden und Kreisen**, definiert durch die Koordinaten oder Punkte x und y , gegeben bei gleichzeitiger Erfülltheit von Gleichungen von der Form

$$ax + by = c, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Auflösen nach x und y ergibt Bestimmungsgleichungen der Form

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{-a}{b}x + \frac{c}{b} - y_0 \right)^2 = r^2,$$

$$(y - y_0)^2 + \left(\frac{-b}{a}y + \frac{c}{a} - x_0 \right)^2 = r^2,$$

wobei hier jeweils $a \neq 0$ und $b \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Klassifizierung von Zahlen

Es ist für jeden Wert von x und y eine Nullstelle eines **quadratischen Polynomes** zu berechnen, also eine Wurzel zu ziehen. Die Koeffizienten dieser quadratischen Polynome sind dabei rationale Funktionen der vorher berechneten Zahlen.

Klassifizierung von Zahlen

Es ist für jeden Wert von x und y eine Nullstelle eines **quadratischen Polynomes** zu berechnen, also eine Wurzel zu ziehen. Die Koeffizienten dieser quadratischen Polynome sind dabei rationale Funktionen der vorher berechneten Zahlen.

Ausgehend von dem Zahlkörper \mathbb{Q} werden also sukzessive **Oberkörper** erzeugt durch **algebraische Körpererweiterung** mit Nullstellen von Polynomen vom Grad 2, als Beispiel erhält man so etwa

$$\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{p + \sqrt{2}q : p, q \in \mathbb{Q}\}$$

Klassifizierung von Zahlen

Es ist für jeden Wert von x und y eine Nullstelle eines **quadratischen Polynomes** zu berechnen, also eine Wurzel zu ziehen. Die Koeffizienten dieser quadratischen Polynome sind dabei rationale Funktionen der vorher berechneten Zahlen.

Ausgehend von dem Zahlkörper \mathbb{Q} werden also sukzessive **Oberkörper** erzeugt durch **algebraische Körpererweiterung** mit Nullstellen von Polynomen vom Grad 2, als Beispiel erhält man so etwa

$$\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{p + \sqrt{2}q : p, q \in \mathbb{Q}\}$$

Danach kann man z. B. $\sqrt{3}$ als Nullstelle von $x^2 - 3$ hinzufügen und erhält so

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_2 &:= \mathbb{Q}_1(\sqrt{3}) := \{p + \sqrt{3}q : p, q \in \mathbb{Q}_1\} \\ &= \{p_1 + \sqrt{2}p_2 + \sqrt{3}p_3 + \sqrt{6}p_4 : p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Q}\} =: \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Klassifizierung von Zahlen

Man kann natürlich aber auch andere Nullstellen von quadratischen Polynomen erzeugen, so z. B. den goldenen Schnitt

$$\Phi := \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

welcher auch eine irrationale Zahl ist.

Klassifizierung von Zahlen

Man kann natürlich aber auch andere Nullstellen von quadratischen Polynomen erzeugen, so z. B. den goldenen Schnitt

$$\Phi := \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

welcher auch eine irrationale Zahl ist.

Die Frage nach der „**Quadratur des Kreises**“ ist also die nach der (Un)möglichkeit der Konstruktion einer geeigneten „Körpererweiterung“ mittels Nullstellen quadratischer Polynome, welche die Zahl π enthält.

Klassifizierung von Zahlen

Man kann natürlich aber auch andere Nullstellen von quadratischen Polynomen erzeugen, so z. B. den goldenen Schnitt

$$\Phi := \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

welcher auch eine irrationale Zahl ist.

Die Frage nach der „**Quadratur des Kreises**“ ist also die nach der (Un)möglichkeit der Konstruktion einer geeigneten „Körpererweiterung“ mittels Nullstellen quadratischer Polynome, welche die Zahl π enthält.

Anders ausgedrückt: Läßt sich π eventuell mit **endlich vielen** (Quadrat-)Wurzeln schreiben als

$$\pi = \sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}}{\sqrt{e} + \sqrt{d}}}$$

Übersicht

Ursprung

Approximationen
Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
Irrationale und konstruierbare Zahlen

Algebraische und transzendente Zahlen

Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

Die Irrationalität von e
Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

Die Irrationalität von π
Die Transzendenz von π

Klassifizierung von Zahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von π , äquivalent dazu, der Konstruierbarkeit eines Quadrates mit der Seitenlänge π bei gegebenem Kreis mit Radius Eins, konnte über 2000 Jahre, genauer, bis in das **Jahr 1882**, nicht beantwortet werden.

Klassifizierung von Zahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von π , äquivalent dazu, der Konstruierbarkeit eines Quadrates mit der Seitenlänge π bei gegebenem Kreis mit Radius Eins, konnte über 2000 Jahre, genauer, bis in das **Jahr 1882**, nicht beantwortet werden.

Die Erweiterung der Idee der konstruierbaren Zahlen als Nullstellen quadratischer Polynome auf die Nullstellen von **beliebigen** (ganzzahligen) Polynomen führte auf die **algebraischen Zahlen**.

Klassifizierung von Zahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von π , äquivalent dazu, der Konstruierbarkeit eines Quadrates mit der Seitenlänge π bei gegebenem Kreis mit Radius Eins, konnte über 2000 Jahre, genauer, bis in das **Jahr 1882**, nicht beantwortet werden.

Die Erweiterung der Idee der konstruierbaren Zahlen als Nullstellen quadratischer Polynome auf die Nullstellen von **beliebigen** (ganzzahligen) Polynomen führte auf die **algebraischen Zahlen**.

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist dabei **algebraisch**, wenn sie Nullstelle eines **ganzzahligen** Polynomes $p \neq 0$ ist,

$$0 = p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

Klassifizierung von Zahlen

Bemerkung: Zu jedem Polynom mit **rationalen** Koeffizienten existiert ein Polynom mit **ganzen** Koeffizienten und denselben Nullstellen. Das folgt aus der Multiplikation des rationalen Polynomes mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner der Koeffizienten.

Klassifizierung von Zahlen

Bemerkung: Zu jedem Polynom mit **rationalen** Koeffizienten existiert ein Polynom mit **ganzen** Koeffizienten und denselben Nullstellen. Das folgt aus der Multiplikation des rationalen Polynomes mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner der Koeffizienten.

Der Grad des Polynomes mit kleinstem Grad, welches $p(x) = 0$ erfüllt, ist der **Grad der algebraischen Zahl** x . So hat $\sqrt{2}$ den Grad zwei, und jede rationale Zahl den Grad Eins, da $r = z/n$ Nullstelle von $nx - z$ ist.

Klassifizierung von Zahlen

Bemerkung: Zu jedem Polynom mit **rationalen** Koeffizienten existiert ein Polynom mit **ganzen** Koeffizienten und denselben Nullstellen. Das folgt aus der Multiplikation des rationalen Polynomes mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner der Koeffizienten.

Der Grad des Polynomes mit kleinstem Grad, welches $p(x) = 0$ erfüllt, ist der **Grad der algebraischen Zahl** x . So hat $\sqrt{2}$ den Grad zwei, und jede rationale Zahl den Grad Eins, da $r = z/n$ Nullstelle von $nx - z$ ist.

Hat das minimale ganzzahlige Polynom p mit $p(x) = 0$ den Höchstkoeffizienten Eins, so ist x eine **ganze algebraische Zahl**. So ist $\sqrt{2}$ eine ganze algebraische Zahl, die algebraische Zahl

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

als Nullstelle von $2x^2 - 1 = 0$ nicht.

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Nach Cantor kann man zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen abzählbar unendlich ist.

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Nach Cantor kann man zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen abzählbar unendlich ist.

Es gibt nur abzählbar unendlich viele Polynomgrade, pro Polynom hat man nur endlich viele Koeffizienten mit abzählbar unendlich vielen Möglichkeiten, einen Koeffizienten zu wählen, also **sind die algebraischen Zahlen abzählbar**.

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Nach Cantor kann man zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen abzählbar unendlich ist.

Es gibt nur abzählbar unendlich viele Polynomgrade, pro Polynom hat man nur endlich viele Koeffizienten mit abzählbar unendlich vielen Möglichkeiten, einen Koeffizienten zu wählen, also **sind die algebraischen Zahlen abzählbar**.

Es gibt also nur abzählbar viele algebraische Zahlen \mathbb{A} in \mathbb{R} . Was ist mit **den anderen Zahlen** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, den sogenannten **transzendenten Zahlen**?

Klassifizierung von Zahlen

Einige der irrationalen Zahlen sind also algebraische Zahlen, alle rationalen Zahlen sind auch algebraische Zahlen. Sind eventuell alle Zahlen algebraische Zahlen?

Nach Cantor kann man zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen abzählbar unendlich ist.

Es gibt nur abzählbar unendlich viele Polynomgrade, pro Polynom hat man nur endlich viele Koeffizienten mit abzählbar unendlich vielen Möglichkeiten, einen Koeffizienten zu wählen, also **sind die algebraischen Zahlen abzählbar**.

Es gibt also nur abzählbar viele algebraische Zahlen \mathbb{A} in \mathbb{R} . Was ist mit **den anderen Zahlen** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, den sogenannten **transzendenten Zahlen**?

Die ersten beweisbar transzendenten Zahlen fand Liouville 1844/1851, (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b; Liouville, 1851), siehe auch (Lützen, 1990, Seite 520–526), diese heißen deshalb **Liouville-Zahlen**.

Klassifizierung von Zahlen

Liouville gab 1844 an und bewies 1851, dass für alle algebraischen Zahlen α vom Grad $n \geq 2$ für eine von $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

gilt.

Klassifizierung von Zahlen

Liouville gab 1844 an und bewies 1851, dass für alle algebraischen Zahlen α vom Grad $n \geq 2$ für eine von $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

gilt.

Algebraische Zahlen sind also diejenigen Zahlen, welche sich nur äusserst schlecht durch (andere) rationale Zahlen **annähern** lassen.

Klassifizierung von Zahlen

Liouville gab 1844 an und bewies 1851, dass für alle algebraischen Zahlen α vom Grad $n \geq 2$ für eine von $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

gilt.

Algebraische Zahlen sind also diejenigen Zahlen, welche sich nur äusserst schlecht durch (andere) rationale Zahlen **annähern** lassen.

Später wurde in Arbeiten von Thue, Siegel und Schneider sogar gezeigt, dass sich algebraische Zahlen auch schlecht von anderen algebraischen Zahlen mit niedrigerem Grad approximieren lassen, vergleiche mit dem sogenannten **Siegel-Schneider-Theorem**.

Klassifizierung von Zahlen

Der Beweis von Liouilles Resultat (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

ist mit **einfachen Mitteln** nachvollziehbar:

Klassifizierung von Zahlen

Der Beweis von Liouvilles Resultat (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

ist mit **einfachen Mitteln** nachvollziehbar: Sei α die algebraische Zahl, f das ganzzahlige Polynom und

$$M := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)|.$$

Klassifizierung von Zahlen

Der Beweis von Liouilles Resultat (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

ist mit **einfachen Mitteln** nachvollziehbar: Sei α die algebraische Zahl, f das ganzzahlige Polynom und

$$M := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)|.$$

Es seien die von α verschiedenen Nullstellen durch α_1 bis α_m gegeben.

Klassifizierung von Zahlen

Der Beweis von Liouilles Resultat (Liouville, 1844a; Liouville, 1844b)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$$

ist mit **einfachen Mitteln** nachvollziehbar: Sei α die algebraische Zahl, f das ganzzahlige Polynom und

$$M := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)|.$$

Es seien die von α verschiedenen Nullstellen durch α_1 bis α_m gegeben. Es sei dann ein c mit

$$0 < c < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m| \right\}$$

gewählt.

Klassifizierung von Zahlen

Angenommen, es gäbe jetzt ganze $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^n} \leq c < 1.$$

Klassifizierung von Zahlen

Angenommen, es gäbe jetzt ganze $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^n} \leq c < 1.$$

Dann ist aufgrund der Wahl von c ,

$$0 < c < \min\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\right\},$$

sowohl p/q im Intervall $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, als auch von den **anderen Nullstellen verschieden**.

Klassifizierung von Zahlen

Nach dem Mittelwertsatz gibt es jetzt ein ξ zwischen p/q und α , also

$$\xi \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$

so dass

$$\left| f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\xi)|$$

gilt.

Klassifizierung von Zahlen

Nach dem Mittelwertsatz gibt es jetzt ein ξ zwischen p/q und α , also

$$\xi \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$

so dass

$$\left| f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\xi)|$$

gilt.

Demnach gilt also

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| (|f'(\xi)|)^{-1}.$$

Klassifizierung von Zahlen

Da

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i$$

ein Polynom mit **ganzen Zahlen** als Koeffizienten und p/q **keine Nullstelle** ist, gilt

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{c_i p^i q^{n-i}}{q^n} \right| = \left| \sum_{i=1}^n c_i p^i q^{n-i} \right| \frac{1}{q^n} \geq \frac{1}{q^n},$$

und $|f'(\xi)| \leq M$.

Klassifizierung von Zahlen

Da

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i$$

ein Polynom mit **ganzen Zahlen** als Koeffizienten und p/q **keine Nullstelle** ist, gilt

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{c_i p^i q^{n-i}}{q^n} \right| = \left| \sum_{i=1}^n c_i p^i q^{n-i} \right| \frac{1}{q^n} \geq \frac{1}{q^n},$$

und $|f'(\xi)| \leq M$.

Zusammen folgt also der **Widerspruch**

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| (|f'(\xi)|)^{-1} \geq \frac{1}{Mq^n} > \frac{c}{q^n} \geq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind Zahlen, welche die Eigenschaft haben, dass **für alle** $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$ existieren, so dass

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

gilt, **transzendent**.

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind Zahlen, welche die Eigenschaft haben, dass **für alle** $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$ existieren, so dass

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

gilt, **transzendent**.

Solche Zahlen heissen **Liouvillesche Zahlen**. Liouville bewies auch gleich 1851, dass unter anderem die heute sogenannte **Liouvillesche Konstante**

$$\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} \approx 0.110001000000000000000000000000001000000000000000000$$

transzendent ist.

Klassifizierung von Zahlen

Demnach sind Zahlen, welche die Eigenschaft haben, dass **für alle** $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$ existieren, so dass

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

gilt, **transzendent**.

Solche Zahlen heissen **Liouvillesche Zahlen**. Liouville bewies auch gleich 1851, dass unter anderem die heute sogenannte **Liouvillesche Konstante**

$$\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} \approx 0.1100010000000000000000000100000000000000000$$

transzendent ist. Es gibt überabzählbar unendlich viele Liouvillesche Zahlen. Die meisten reellen Zahlen gehören aber **nicht** dazu.

Übersicht

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen

Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Klassifizierung von Zahlen

Eine echte Obermenge zu den algebraischen Zahlen bilden die **berechenbaren Zahlen**. Eine Zahl heisst berechenbar, wenn es eine Berechnungsvorschrift (ergo: Turing-Maschine) gibt, nach der jede (Dezimal- oder Binär-)Stelle berechnet werden kann.

Klassifizierung von Zahlen

Eine echte Obermenge zu den algebraischen Zahlen bilden die **berechenbaren Zahlen**. Eine Zahl heisst berechenbar, wenn es eine Berechnungsvorschrift (ergo: Turing-Maschine) gibt, nach der jede (Dezimal- oder Binär-)Stelle berechnet werden kann.

Jede algebraische Zahl ist berechenbar. Die Zahl π ist nach Archimedes Ansatz berechenbar. Die Zahl e ist berechenbar. Ist jede Zahl berechenbar?

Klassifizierung von Zahlen

Eine echte Obermenge zu den algebraischen Zahlen bilden die **berechenbaren Zahlen**. Eine Zahl heisst berechenbar, wenn es eine Berechnungsvorschrift (ergo: Turing-Maschine) gibt, nach der jede (Dezimal- oder Binär-)Stelle berechnet werden kann.

Jede algebraische Zahl ist berechenbar. Die Zahl π ist nach Archimedes Ansatz berechenbar. Die Zahl e ist berechenbar. Ist jede Zahl berechenbar?

Berechenbare Zahlen gehen auf Alan Turing (Turing, 1937; Turing, 1938) zurück, wieder zeigt sich, dass es nur abzählbar unendlich viele berechenbare Zahlen gibt. Es gibt also immer noch unendlich viele **nicht berechenbare Zahlen**.

Klassifizierung von Zahlen

Zwei Beispiele nicht berechenbarer Zahlen sind die Haltezahl (definiert über das Halteproblem der Informatik) und die **Chaitin-Konstanten**, als Beispiel

$$\begin{aligned}\Omega &:= \sum_{p \text{ hält}} 2^{-|p|} \\ &= 0.0000001000000100000110001000011010001111110010111 \dots_2 \\ &= 0.0078749969978123844 \dots_{10},\end{aligned}$$

die mittels der Wahrscheinlichkeit definiert werden, dass ein zufälliges Turing-Programm p mit einer Länge von $|p|$ Bits bei Ausführung auf einer **fest gewählten Präfix-freien universellen Turing-Maschine** hält.

Klassifizierung von Zahlen

Zwei Beispiele nicht berechenbarer Zahlen sind die Haltezahl (definiert über das Halteproblem der Informatik) und die **Chaitin-Konstanten**, als Beispiel

$$\begin{aligned}\Omega &:= \sum_{p \text{ hält}} 2^{-|p|} \\ &= 0.0000001000000100000110001000011010001111110010111 \dots_2 \\ &= 0.0078749969978123844 \dots_{10},\end{aligned}$$

die mittels der Wahrscheinlichkeit definiert werden, dass ein zufälliges Turing-Programm p mit einer Länge von $|p|$ Bits bei Ausführung auf einer **fest gewählten Präfix-freien universellen Turing-Maschine** hält.

Die angegebenen Ziffern stammen aus einer Arbeit von 2002 von Calude, Dinneen und Shu. Um diese Ziffern zu erhalten, wurden nur die Wahrscheinlichkeiten für Programme bis zu 84 Bit berechnet, aufgrund von algorithmischen Besonderheiten sind die ersten 64 Bit **korrekt**.

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Borel führte 1909 den Begriff der **normalen Zahl** ein. Eine Zahl x heisst normal (zur Basis b), wenn alle Ziffernblöcke in der Entwicklung zur Basis b mit derselben Häufigkeit wie auch beim Würfeln auftreten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ Ziffernblock innerhalb der ersten } n \text{ Stellen}}{n} = \frac{1}{b^{\text{Anzahl der Ziffern}}}$$

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Borel führte 1909 den Begriff der **normalen Zahl** ein. Eine Zahl x heisst normal (zur Basis b), wenn alle Ziffernblöcke in der Entwicklung zur Basis b mit derselben Häufigkeit wie auch beim Würfeln auftreten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ Ziffernblock innerhalb der ersten } n \text{ Stellen}}{n} = \frac{1}{b^{\text{Anzahl der Ziffern}}}$$

Absolut normale Zahlen sind Zahlen, die bezüglich **jeder** Basis normal sind.

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Borel führte 1909 den Begriff der **normalen Zahl** ein. Eine Zahl x heisst normal (zur Basis b), wenn alle Ziffernblöcke in der Entwicklung zur Basis b mit derselben Häufigkeit wie auch beim Würfeln auftreten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ Ziffernblock innerhalb der ersten } n \text{ Stellen}}{n} = \frac{1}{b^{\text{Anzahl der Ziffern}}}$$

Absolut normale Zahlen sind Zahlen, die bezüglich **jeder** Basis normal sind.

Borel bewies, dass die meisten reellen Zahlen normal sind. Rationale Zahlen sind nicht normal. Chaitins Konstante ist normal.

Klassifizierung von Zahlen

Wo bleiben denn nun die anderen reellen Zahlen?

Borel führte 1909 den Begriff der **normalen Zahl** ein. Eine Zahl x heisst normal (zur Basis b), wenn alle Ziffernblöcke in der Entwicklung zur Basis b mit derselben Häufigkeit wie auch beim Würfeln auftreten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ Ziffernblock innerhalb der ersten } n \text{ Stellen}}{n} = \frac{1}{b^{\text{Anzahl der Ziffern}}}$$

Absolut normale Zahlen sind Zahlen, die bezüglich **jeder** Basis normal sind.

Borel bewies, dass die meisten reellen Zahlen normal sind. Rationale Zahlen sind nicht normal. Chaitins Konstante ist normal.

Es ist nicht klar, ob π normal ist (z. B. zur Basis 11, vergl. mit dem Roman "Contact" von Carl Sagan, wurde verfilmt mit Jodie Foster).

Übersicht

Ursprung

Approximationen
Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
Irrationale und konstruierbare Zahlen
Algebraische und transzendente Zahlen
Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

Die Irrationalität von e
Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

Die Irrationalität von π
Die Transzendenz von π

Irrationalität von e

Euler bewies 1737 (veröffentlicht erst 1744, (Euler, 1744)), dass die nach ihm benannte Zahl e , definiert als der Wert der **Exponentialfunktion**

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

an der Stelle 1,

Irrationalität von e

Euler bewies 1737 (veröffentlicht erst 1744, (Euler, 1744)), dass die nach ihm benannte Zahl e , definiert als der Wert der **Exponentialfunktion**

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

an der Stelle 1, also

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \approx 2.718281828459045235$$

irrational ist.

Irrationalität von e

Euler bewies 1737 (veröffentlicht erst 1744, (Euler, 1744)), dass die nach ihm benannte Zahl e , definiert als der Wert der **Exponentialfunktion**

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

an der Stelle 1, also

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \approx 2.718281828459045235$$

irrational ist. Sein Beweis basierte auf einem **Kettenbruch** für e , welcher zuerst 1714 angegeben wurde von Roger Cotes (Cotes, 1714, Seite 11).

Irrationalität von e

Euler bewies 1737 (veröffentlicht erst 1744, (Euler, 1744)), dass die nach ihm benannte Zahl e , definiert als der Wert der **Exponentialfunktion**

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

an der Stelle 1, also

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \approx 2.718281828459045235$$

irrational ist. Sein Beweis basierte auf einem **Kettenbruch** für e , welcher zuerst 1714 angegeben wurde von Roger Cotes (Cotes, 1714, Seite 11).

Nachfolgend ein schöner **einfacher Widerspruchsbeweis**, in Nicolas Dominique Marie Janot de Stainvilles Buch (de Stainville, 1815) Jean Baptiste Joseph Fourier zugeschrieben, siehe dort die Anmerkung auf Seite 341.

Irrationalität von e

Wir nehmen mit Fourier an, dass

$$2 < e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist ja $e \notin \mathbb{N}$, also sicherlich $q > 1$.

Irrationalität von e

Wir nehmen mit Fourier an, dass

$$2 < e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist ja $e \notin \mathbb{N}$, also sicherlich $q > 1$.

Multiplikation von e mit $q!$ ergibt

$$\mathbb{N} \ni (q-1)!p = q!e = q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Irrationalität von e

Wir nehmen mit Fourier an, dass

$$2 < e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist ja $e \notin \mathbb{N}$, also sicherlich $q > 1$.

Multiplikation von e mit $q!$ ergibt

$$\mathbb{N} \ni (q-1)!p = q!e = q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Wir zeigen jetzt, dass die Reihe auf der rechten Seite **keine** natürliche Zahl ergeben kann.

Irrationalität von e

Wir trennen die Reihe in einen ganzzahligen und einen kleinen Teil,

$$q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}.$$

Irrationalität von e

Wir trennen die Reihe in einen ganzzahligen und einen kleinen Teil,

$$q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}.$$

In dieser Trennung ist garantiert die vorne stehende Summe **ganzzahlig**,

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} = q! + \frac{q!}{1} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \in \mathbb{N}.$$

Irrationalität von e

Wir trennen die Reihe in einen ganzzahligen und einen kleinen Teil,

$$q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}.$$

In dieser Trennung ist garantiert die vorne stehende Summe **ganzzahlig**,

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} = q! + \frac{q!}{1} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \in \mathbb{N}.$$

Nun zeigen wir, dass der hintere Teil

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

keine ganze Zahl sein kann, da er **zu klein** ist.

Irrationalität von e

Die hintere Reihe

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

ist klein (aber nicht Null), denn dank $q > 1$ und $k > q$ gilt

$$0 < \frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdots (q+(k-q))} \leq \frac{1}{3^{k-q}},$$

Irrationalität von e

Die hintere Reihe

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

ist klein (aber nicht Null), denn dank $q > 1$ und $k > q$ gilt

$$0 < \frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdots (q+(k-q))} \leq \frac{1}{3^{k-q}},$$

wobei das Gleichheitszeichen in dem „ \leq “ **nur für $k = q + 1$** gelten kann, für alle weiteren Terme gilt dort „ $<$ “.

Irrationalität von e

Die hintere Reihe

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

ist klein (aber nicht Null), denn dank $q > 1$ und $k > q$ gilt

$$0 < \frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdots (q+(k-q))} \leq \frac{1}{3^{k-q}},$$

wobei das Gleichheitszeichen in dem „ \leq “ **nur für $k = q + 1$** gelten kann, für alle weiteren Terme gilt dort „ $<$ “.

Damit folgt

$$0 < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-q}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j}.$$

Irrationalität von e

Die Reihe auf der rechten Seite ist eine **geometrische Reihe**, es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Irrationalität von e

Die Reihe auf der rechten Seite ist eine **geometrische Reihe**, es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt nämlich für $|x| < 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k x^j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

Irrationalität von e

Die Reihe auf der rechten Seite ist eine **geometrische Reihe**, es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt nämlich für $|x| < 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k x^j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

da offensichtlich

$$(1 - x) \sum_{j=0}^k x^j = \sum_{j=0}^k x^j - \sum_{j=1}^{k+1} x^j = 1 - x^{k+1}.$$

Irrationalität von e

Insgesamt haben wir gezeigt, dass aus der Annahme, dass $e \in \mathbb{Q}$, der Widerspruch

$$\mathbb{N} \ni q!e = \underbrace{\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}}_{>0, <1} \notin \mathbb{N}$$

folgt, mithin e also irrational ist.

Übersicht

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Transzendenz von e

Die **Transzendenz von e** wurde zuerst 1873 von Charles Hermite gezeigt, (Hermite, 1873), siehe auch (Gel'fond, 1960, Seite 41–44).

Transzendenz von e

Die **Transzendenz von e** wurde zuerst 1873 von Charles Hermite gezeigt, (Hermite, 1873), siehe auch (Gel'fond, 1960, Seite 41–44).

Hier geben wir den **einfacheren Beweis** von David Hilbert aus dem Jahre 1893 (Hilbert, 1893a) wieder, siehe auch (Hurwitz, 1893; Gordan, 1893). Der Beweis basiert wieder auf der Konstruktion eines Widerspruchs.

Transzendenz von e

Die **Transzendenz von e** wurde zuerst 1873 von Charles Hermite gezeigt, (Hermite, 1873), siehe auch (Gel'fond, 1960, Seite 41–44).

Hier geben wir den **einfacheren Beweis** von David Hilbert aus dem Jahre 1893 (Hilbert, 1893a) wieder, siehe auch (Hurwitz, 1893; Gordan, 1893). Der Beweis basiert wieder auf der Konstruktion eines Widerspruchs.

Sei e algebraisch. Dann gibt es ein Polynom, so dass

$$a + a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \quad (1)$$

dessen Koeffizienten **ganze Zahlen** sind, wobei $a \neq 0$ angenommen werden kann, sonst könnte man durch e teilen und ein Polynom einen Grad kleiner betrachten.

Transzendenz von e

Jetzt werden beide Seiten der Gleichung (1), also

$$a + a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \quad (1)$$

Transzendenz von e

Jetzt werden beide Seiten der Gleichung (1), also

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \quad (1)$$

mit dem **Integral**

$$I_0^\infty := \int_0^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx \quad (2)$$

für ein **später noch genauer bestimmtes** $m \in \mathbb{N}$ multipliziert.

Transzendenz von e

Mit der Abkürzung

$$I_j^\infty := \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3)$$

seien die „**unten abgeschnittenen**“ Teilintegrale,

Transzendenz von e

Mit der Abkürzung

$$I_j^\infty := \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3)$$

seien die „**unten abgeschnittenen**“ **Teilintegrale**, mit

$$I_0^j := \int_0^j x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n \quad (4)$$

die nun **fehlenden unteren Teilintegrale** bezeichnet.

Transzendenz von e

Mit der Abkürzung

$$I_j^\infty := \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3)$$

seien die „**unten abgeschnittenen**“ **Teilintegrale**, mit

$$I_0^j := \int_0^j x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n \quad (4)$$

die nun **fehlenden unteren Teilintegrale** bezeichnet.

Es gilt $I_0^\infty = I_0^j + I_j^\infty$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Transzendenz von e

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wie folgt in **zwei Teile** zerlegt,

$$0 = aI_0^\infty + a_1eI_0^\infty + a_2e^2I_0^\infty + \cdots + a_n e^n I_0^\infty \quad (5)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty \\ + a_1eI_0^1 + a_2e^2I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} P_1 \\ + P_2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Transzendenz von e

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wie folgt in **zwei Teile** zerlegt,

$$0 = aI_0^\infty + a_1eI_0^\infty + a_2e^2I_0^\infty + \cdots + a_n e^n I_0^\infty \quad (5)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty \\ + a_1eI_0^1 + a_2e^2I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} P_1 \\ + P_2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Wir werden jetzt zeigen, dass der erste Teil

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

ganzzahlig ist.

Transzendenz von e

Wegen

$$\int_0^{\infty} x^j e^{-x} dx = j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Transzendenz von e

Wegen

$$\int_0^{\infty} x^j e^{-x} dx = j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ist auch

$$\begin{aligned} I_0^{\infty} &= \int_0^{\infty} x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{m+n(m+1)} e^{-x} + \cdots + (-1)^{n(m+1)} (n!)^{m+1} x^m e^{-x} dx \\ &= (m+n(m+1))! + \cdots + (-1)^{n(m+1)} (n!)^{m+1} (m!) \end{aligned}$$

eine **ganze Zahl**, überdies durch **$m!$** teilbar.

Transzendenz von e

Wegen

$$\int_0^{\infty} x^j e^{-x} dx = j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ist auch

$$\begin{aligned} I_0^{\infty} &= \int_0^{\infty} x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{m+n(m+1)} e^{-x} + \cdots + (-1)^{n(m+1)} (n!)^{m+1} x^m e^{-x} dx \\ &= (m+n(m+1))! + \cdots + (-1)^{n(m+1)} (n!)^{m+1} (m!) \end{aligned}$$

eine **ganze Zahl**, überdies durch **$m!$ teilbar**.

Teilung durch $(m+1)!$ ergibt den **Rest $\pm(n!)^{m+1}$** , welcher nicht Null ist, falls $m+1$ eine **Primzahl** größer als n ist.

Transzendenz von e

Die anderen Integrale multipliziert mit der entsprechenden Potenz in e sind **wiederum ganzzahlig** und haben sogar **mindestens den Teiler $(m+1)!$** , da

$$e^j I_j^\infty = e^j \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n$$

Transzendenz von e

Die anderen Integrale multipliziert mit der entsprechenden Potenz in e sind **wiederum ganzzahlig** und haben sogar **mindestens den Teiler $(m+1)!$** , da

$$e^j I_j^\infty = e^j \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n$$

nach der **Variablensubstitution**

$$x = z + j, \quad \frac{dx}{dz} = 1, \quad e^{-x} = e^{-z-j} = e^{-z} e^{-j}$$

Transzendenz von e

Die anderen Integrale multipliziert mit der entsprechenden Potenz in e sind **wiederum ganzzahlig** und haben sogar **mindestens den Teiler $(m+1)!$** , da

$$e^j I_j^\infty = e^j \int_j^\infty x^m ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^{m+1} e^{-x} dx, \quad 1 \leq j \leq n$$

nach der **Variablensubstitution**

$$x = z + j, \quad \frac{dx}{dz} = 1, \quad e^{-x} = e^{-z-j} = e^{-z} e^{-j}$$

die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} e^j I_j^\infty &= \int_0^\infty (z+j)^m ((z+j-1)(z+j-2)\cdots(z+j-n))^{m+1} e^{-z} dz \\ &= \int_0^\infty z^{m+n(m+1)} + \cdots + \\ &\quad j^m ((j-1)(j-2)\cdots(1)(-1)(-2)\cdots(j-n))^{m+1} z^{m+1} e^{-z} dz. \end{aligned}$$

Transzendenz von e

Zusammengefasst ist

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

aufgrund dieser Überlegungen **ganzzahlig**, da sowohl a und I_0^∞ als auch alle a_j und alle I_j^∞ ganzzahlig sind.

Transzendenz von e

Zusammengefasst ist

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

aufgrund dieser Überlegungen **ganzzahlig**, da sowohl a und I_0^∞ als auch alle a_j und alle I_j^∞ ganzzahlig sind. Weiterhin ist jeder Summand **durch $m!$ teilbar**, da I_0^∞ durch $m!$ teilbar ist, und die anderen I_j^∞ sogar durch $(m+1)!$ teilbar sind.

Transzendenz von e

Zusammengefasst ist

$$P_1 = aI_0^\infty + a_1eI_1^\infty + a_2e^2I_2^\infty + \cdots + a_n e^n I_n^\infty$$

aufgrund dieser Überlegungen **ganzzahlig**, da sowohl a und I_0^∞ als auch alle a_j und alle I_j^∞ ganzzahlig sind. Weiterhin ist jeder Summand **durch $m!$ teilbar**, da I_0^∞ durch $m!$ teilbar ist, und die anderen I_j^∞ sogar durch $(m+1)!$ teilbar sind.

Damit, und da

$$\frac{aI_0^\infty}{m!} = (-1)^{n(m+1)} a(n!)^{m+1}$$

gilt, folgt

$$\frac{P_1}{m!} = (-1)^{n(m+1)} a(n!)^{m+1} \pmod{m+1}.$$

Transzendenz von e

Jetzt zeigen wir, dass die Division des zweiten Teiles

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

durch $m!$ für grosse Primzahlen $m + 1$ beliebig klein werden kann.

Transzendenz von e

Jetzt zeigen wir, dass die Division des zweiten Teiles

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

durch $m!$ für grosse Primzahlen $m + 1$ beliebig klein werden kann.

Dazu schätzen wir die **Hilfsfunktionen** auf dem Intervall $[0, n]$ wie folgt ab:

$$|x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| \leq K := \max_{x \in [0, n]} |x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| < n^{n+1}$$

$$|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| \leq k := \max_{x \in [0, n]} |(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| < n^n$$

Transzendenz von e

Jetzt zeigen wir, dass die Division des zweiten Teiles

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

durch $m!$ für grosse Primzahlen $m + 1$ beliebig klein werden kann.

Dazu schätzen wir die **Hilfsfunktionen** auf dem Intervall $[0, n]$ wie folgt ab:

$$|x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| \leq K := \max_{x \in [0, n]} |x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)| < n^{n+1}$$

$$|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| \leq k := \max_{x \in [0, n]} |(x-1)(x-2)\cdots(x-n)e^{-x}| < n^n$$

Damit gilt dann für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$|I_0^\ell| = \left| \int_0^\ell x^m \left((x-1)(x-2)\cdots(x-n) \right)^{m+1} e^{-x} dx \right| < \ell k K^m.$$

Transzendenz von e

Aus der **Darstellung**

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

Transzendenz von e

Aus der **Darstellung**

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

und der **Abschätzung**

$$|I_0^\ell| < \ell k K^m$$

Transzendenz von e

Aus der **Darstellung**

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

und der **Abschätzung**

$$|I_0^\ell| < \ell k K^m$$

folgt leicht die **Abschätzung**

$$\begin{aligned} |P_2| &\leq |a_1 e| |I_0^1| + |a_2 e^2| |I_0^2| + \cdots + |a_n e^n| |I_0^n| \\ &< \underbrace{(|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \cdots + n|a_n e^n|)}_{=:c} k K^m. \end{aligned}$$

Transzendenz von e

Aus der **Darstellung**

$$P_2 = a_1 e I_0^1 + a_2 e^2 I_0^2 + \cdots + a_n e^n I_0^n$$

und der **Abschätzung**

$$|I_0^\ell| < \ell k K^m$$

folgt leicht die **Abschätzung**

$$\begin{aligned} |P_2| &\leq |a_1 e| |I_0^1| + |a_2 e^2| |I_0^2| + \cdots + |a_n e^n| |I_0^n| \\ &< \underbrace{(|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \cdots + n|a_n e^n|)}_{=:c} k K^m. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left| \frac{P_2}{m!} \right| < \frac{c K^m}{m!}.$$

Transzendenz von e

Wir haben jetzt gezeigt, dass sowohl

$$0 = \frac{P_1}{m!} + \frac{P_2}{m!},$$

Transzendenz von e

Wir haben jetzt gezeigt, dass sowohl

$$0 = \frac{P_1}{m!} + \frac{P_2}{m!},$$

als auch, dass für Primzahlen $m + 1 > n$, $m + 1 > a$

$$\frac{P_1}{m!} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Transzendenz von e

Wir haben jetzt gezeigt, dass sowohl

$$0 = \frac{P_1}{m!} + \frac{P_2}{m!},$$

als auch, dass für Primzahlen $m + 1 > n$, $m + 1 > a$

$$\frac{P_1}{m!} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

und dass für genügend grosse m

$$\left| \frac{P_2}{m!} \right| < \frac{cK^m}{m!} < 1.$$

Transzendenz von e

Wir haben jetzt gezeigt, dass sowohl

$$0 = \frac{P_1}{m!} + \frac{P_2}{m!},$$

als auch, dass für Primzahlen $m + 1 > n$, $m + 1 > a$

$$\frac{P_1}{m!} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

und dass für genügend grosse m

$$\left| \frac{P_2}{m!} \right| < \frac{cK^m}{m!} < 1.$$

Daraus folgt der **Widerspruch**.

Übersicht

Ursprung

Approximationen
Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
Irrationale und konstruierbare Zahlen
Algebraische und transzendente Zahlen
Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

Die Irrationalität von e
Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

Die Irrationalität von π
Die Transzendenz von π

Irrationalität von π

Der **erste Beweis der Irrationalität von π** stammt von Johann Heinrich Lambert aus dem Jahre 1766. Er schrieb zuerst darüber ein Kapitel

„Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“

im zweiten 1770 veröffentlichten Band seiner

„Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“,
(Lambert, 1770).

Irrationalität von π

Der **erste Beweis der Irrationalität von π** stammt von Johann Heinrich Lambert aus dem Jahre 1766. Er schrieb zuerst darüber ein Kapitel

„Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“

im zweiten 1770 veröffentlichten Band seiner

„Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“,
(Lambert, 1770).

Wenige Monate später legte er die 1768 veröffentlichte Arbeit

„Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques“, (Lambert, 1768)

bei der „Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin“ mit dem **endgültigen Resultat** vor.

Irrationalität von π

Lamberts Beweis basiert auf der Entwicklung gewisser trigonometrischer Funktionen als **Kettenbrüche** und deren Eigenschaften. Dieser Beweis ist für (werdende) Erstsemester nicht so leicht zugänglich.

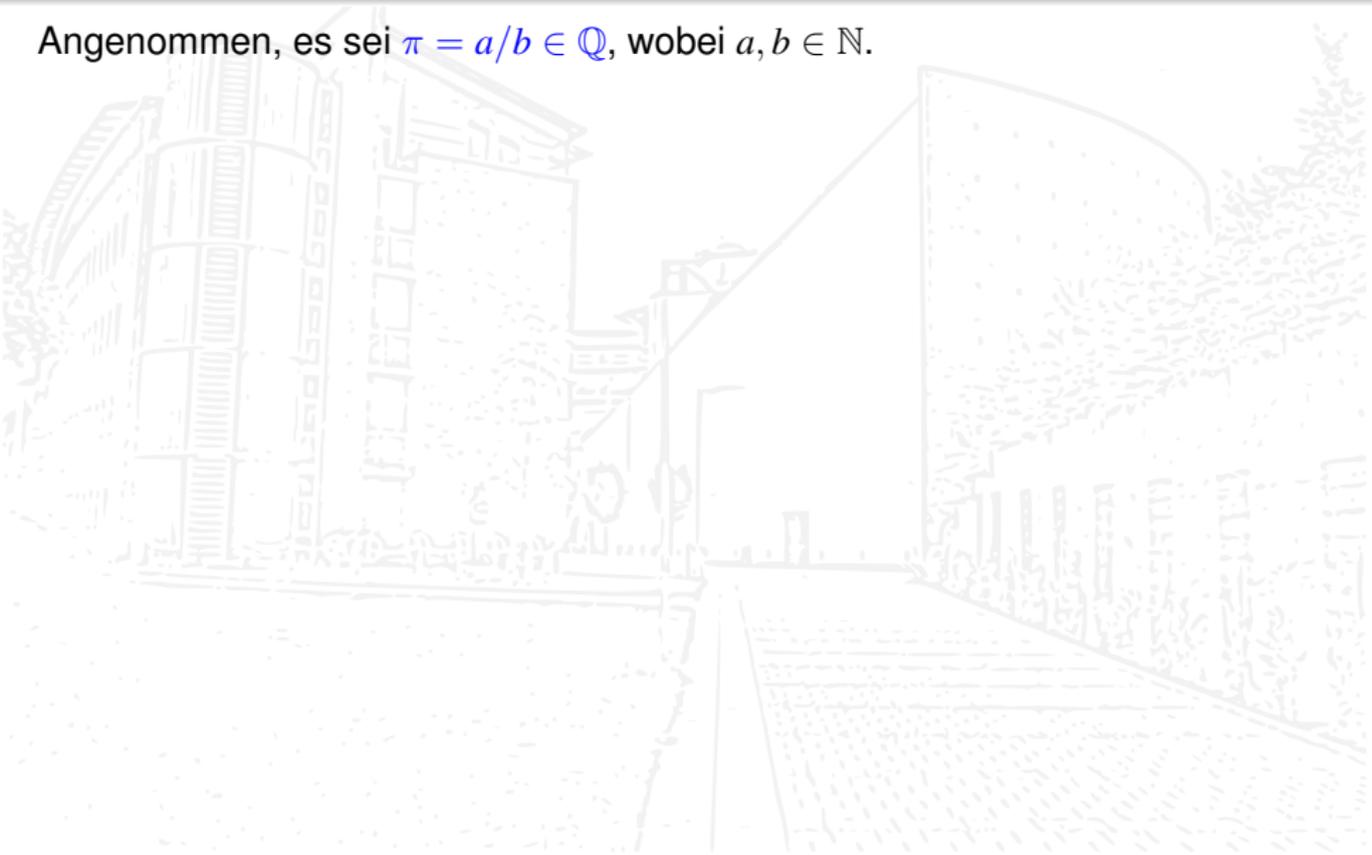
Irrationalität von π

Lamberts Beweis basiert auf der Entwicklung gewisser trigonometrischer Funktionen als **Kettenbrüche** und deren Eigenschaften. Dieser Beweis ist für (werdende) Erstsemester nicht so leicht zugänglich.

Wir geben hier den **kurzen Beweis nach Ivan Niven** von 1947 (Niven, 1947) wieder.

Irrationalität von π

Angenommen, es sei $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.



Irrationalität von π

Angenommen, es sei $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

Es seien **Polynome** f und F für ein **später bestimmtes** $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Irrationalität von π

Angenommen, es sei $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

Es seien **Polynome** f und F für ein **später bestimmtes** $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Erste Beobachtung: Unter der Annahme $\pi = a/b$ gilt

$$f(x) = f(a/b - x) = f(\pi - x).$$

Irrationalität von π

Angenommen, es sei $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

Es seien **Polynome** f und F für ein **später bestimmtes** $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Erste Beobachtung: Unter der Annahme $\pi = a/b$ gilt

$$f(x) = f(a/b - x) = f(\pi - x).$$

Zweite Beobachtung: Das Polynom f (und damit auch das Polynom F) hat an der Stelle Null (und damit auch bei π) nur ganzzahlige Ableitungen,

$$f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Irrationalität von π

Dritte Beobachtung:

$$\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) = F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x).$$

Irrationalität von π

Dritte Beobachtung:

$$\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) = F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x).$$

Vierte Beobachtung:

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Irrationalität von π

Dritte Beobachtung:

$$\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) = F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x).$$

Vierte Beobachtung:

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits: Für $0 < x < \pi$ gilt logischerweise die **Abschätzung**

$$0 < f(x) \sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Irrationalität von π

Dritte Beobachtung:

$$\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) = F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x).$$

Vierte Beobachtung:

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits: Für $0 < x < \pi$ gilt logischerweise die **Abschätzung**

$$0 < f(x) \sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Jetzt kann man aber zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite für grosse $n \in \mathbb{N}$ **beliebig klein** gemacht werden kann, also insbesondere kleiner als $1/\pi$.

Übersicht

Ursprung

- Approximationen
- Merkverse

Klassifizierung von Zahlen

- Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen
- Irrationale und konstruierbare Zahlen
- Algebraische und transzendente Zahlen
- Berechenbare und normale Zahlen

Die Eulersche Zahl e

- Die Irrationalität von e
- Die Transzendenz von e

Die Ludolphsche Zahl π

- Die Irrationalität von π
- Die Transzendenz von π

Transzendenz von π

Von **1882** stammt **Lindemanns Beweis**, dass die Kreiszahl π eine **transzendente Zahl** ist (Lindemann, 1882b; Lindemann, 1882a), siehe auch (Weierstrass, 1885).

Transzendenz von π

Von **1882** stammt **Lindemanns Beweis**, dass die Kreiszahl π eine **transzendente Zahl** ist (Lindemann, 1882b; Lindemann, 1882a), siehe auch (Weierstrass, 1885).

Mit diesem Beweis lieferte Lindemann die **negative Antwort** auf die alte griechische Aufgabenstellung der Quadratur des Kreises.

Transzendenz von π

Von **1882** stammt **Lindemanns Beweis**, dass die Kreiszahl π eine **transzendente Zahl** ist (Lindemann, 1882b; Lindemann, 1882a), siehe auch (Weierstrass, 1885).

Mit diesem Beweis lieferte Lindemann die **negative Antwort** auf die alte griechische Aufgabenstellung der Quadratur des Kreises.

Der nachfolgende Beweis ist der **vereinfachte Beweis** von David Hilbert von 1893 (Hilbert, 1893a).

Transzendenz von π

Im **Brückenkurs** haben Sie gelernt, dass mit der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}$ die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt.

Transzendenz von π

Im **Brückenkurs** haben Sie gelernt, dass mit der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}$ die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt.

Jetzt konstruiert man, ausgehend von der Annahme, dass $\alpha_1 = i\pi$ algebraisch vom Grad n ist, mit den anderen Nullstellen $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ des entsprechenden Polynomes vom Grade n **den Ausdruck**

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N},$$

wobei $N = 2^n - 1$.

Transzendenz von π

Im **Brückenkurs** haben Sie gelernt, dass mit der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}$ die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt.

Jetzt konstruiert man, ausgehend von der Annahme, dass $\alpha_1 = i\pi$ algebraisch vom Grad n ist, mit den anderen Nullstellen $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ des entsprechenden Polynomes vom Grade n **den Ausdruck**

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N},$$

wobei $N = 2^n - 1$.

Wie man schnell nachrechnet, sind die β_i **Summen der α_j** , es gilt

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad \beta_n = \alpha_n, \quad \beta_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \dots \quad \beta_N = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Transzendenz von π

Also sind die β_i die **Nullstellen der Polynome**

$$p_1(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

$$p_2(z) = (z - \alpha_1 - \alpha_2)(z - \alpha_1 - \alpha_3) \cdots (z - \alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

$$p_3(z) = (z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4) \cdots (z - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

$$\vdots$$

$$p_n(z) = z - \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

Transzendenz von π

Also sind die β_i die **Nullstellen der Polynome**

$$p_1(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

$$p_2(z) = (z - \alpha_1 - \alpha_2)(z - \alpha_1 - \alpha_3) \cdots (z - \alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

$$p_3(z) = (z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4) \cdots (z - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

$$\vdots$$

$$p_n(z) = z - \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

Nun ist aber gerade $p_1(z)$ bis auf die fehlende Skalierung mit dem Faktor bei der höchsten Potenz n nach unserer Voraussetzung ein Polynom mit **ganzzahligen Koeffizienten**.

Transzendenz von π

Wir betrachten das erste Polynom etwas genauer. Sei unser ganzzahliges Polynom gegeben als

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) = a_n p_1(z).$$

Transzendenz von π

Wir betrachten das erste Polynom etwas genauer. Sei unser ganzzahliges Polynom gegeben als

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) = a_n p_1(z).$$

Dann sind die **ersten beiden Koeffizienten** gegeben als

$$a_0 = a_n (-1)^n \prod_{i=1}^n \alpha_i, \quad a_1 = a_n (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{n-1}},$$

Transzendenz von π

Wir betrachten das erste Polynom etwas genauer. Sei unser ganzzahliges Polynom gegeben als

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) = a_n p_1(z).$$

Dann sind die **ersten beiden Koeffizienten** gegeben als

$$a_0 = a_n (-1)^n \prod_{i=1}^n \alpha_i, \quad a_1 = a_n (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{n-1}},$$

alle weiteren durch

$$a_j = a_n (-1)^{n-j} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-j} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{n-j}}.$$

Transzendenz von π

Die hierbei auftretenden Terme

$$\sigma_j := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-j} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-j}} = (-1)^{n-j} \frac{a_j}{a_n}$$

sind somit alle **rational**.

Transzendenz von π

Die hierbei auftretenden Terme

$$\sigma_j := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-j} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{n-j}} = (-1)^{n-j} \frac{a_j}{a_n}$$

sind somit alle **rational**.

Man sieht sofort, dass alle σ_j sich nicht ändern, wenn man die Reihenfolge der α_i ändert. Daher nennt man diese auch **(elementar-)symmetrische Funktionen** der „Wurzeln“ α_i .

Transzendenz von π

Die hierbei auftretenden Terme

$$\sigma_j := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-j} \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-j}} = (-1)^{n-j} \frac{a_j}{a_n}$$

sind somit alle **rational**.

Man sieht sofort, dass alle σ_j sich nicht ändern, wenn man die Reihenfolge der α_i ändert. Daher nennt man diese auch (**elementar**-)symmetrische Funktionen der „Wurzeln“ α_i .

Der sogenannte „Hauptsatz über symmetrische Funktionen“ sagt jetzt aus, dass **jeder** Ausdruck, welcher symmetrisch in den Wurzeln α_i ist, einen **rationalen Wert** liefert. Ist überdies a_n gleich Eins, so ist solch ein Ausdruck sogar **ganzzahlig**.

Transzendenz von π

Da das Polynom

$$p(z) := \prod_{i=1}^n p_i(z)$$

alle β_i als Nullstellen hat und alle Polynome des Produktes sich unter **Vertauschungen der Nullstellen α_i nicht ändern**, ist dieses Polynom ein Polynom mit **rationalen Koeffizienten**.

Transzendenz von π

Da das Polynom

$$p(z) := \prod_{i=1}^n p_i(z)$$

alle β_i als Nullstellen hat und alle Polynome des Produktes sich unter **Vertauschungen der Nullstellen α_i nicht ändern**, ist dieses Polynom ein Polynom mit **rationalen Koeffizienten**.

Wir nehmen mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen v der Nenner mal und erhalten so ein Polynom

$$Z(z) := v \cdot p(z)$$

mit **ganzzahligen Koeffizienten** mit Grad $N = 2^{n-1}$, welches die β_i als Nullstellen hat.

Transzendenz von π

Einige der β_i werden eventuell **gleich Null** sein, diese ergeben in

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N}$$

$1 = e^0$. Alle diese Einsen werden auf den Term 1 aufgeschlagen, es ergibt sich (nach einer Ummummerierung)

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}$$

mit $a \in \mathbb{N}$.

Transzendenz von π

Einige der β_i werden eventuell **gleich Null** sein, diese ergeben in

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N}$$

$1 = e^0$. Alle diese Einsen werden auf den Term 1 aufgeschlagen, es ergibt sich (nach einer Umnummerierung)

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}$$

mit $a \in \mathbb{N}$.

Dieser Umformung entspricht ein **Teilen** des ganzzahligen Polynomes $Z(z)$ **durch den Faktor z^{N-M}** , die verbleibenden β_i sind dann die Nullstellen des ganzzahligen Polynomes

$$\frac{Z(z)}{z^{N-M}} = bz^M + b_1z^{M-1} + \cdots + b_M = 0, \quad b_M \neq 0.$$

Transzendenz von π

Hilbert definiert als nächstes eine **neue Hilfsfunktion**, indem er das Polynom mit den nichttrivialen Nullstellen (ganzzahlig) skaliert,

$$g(z) := b^M \frac{Z(z)}{z^{N-M}} = b^M (bz^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M).$$

Transzendenz von π

Hilbert definiert als nächstes eine **neue Hilfsfunktion**, indem er das Polynom mit den nichttrivialen Nullstellen (ganzzahlig) skaliert,

$$g(z) := b^M \frac{Z(z)}{z^{N-M}} = b^M (bz^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M).$$

Anschliessend betrachtet er **wieder Integrale**, dieses Mal multipliziert er

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M}$$

mit dem Integral

$$J_0^\infty := \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z} dz.$$

Transzendenz von π

Hilbert definiert als nächstes eine **neue Hilfsfunktion**, indem er das Polynom mit den nichttrivialen Nullstellen (ganzzahlig) skaliert,

$$g(z) := b^M \frac{Z(z)}{z^{N-M}} = b^M (bz^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M).$$

Anschliessend betrachtet er **wieder Integrale**, dieses Mal multipliziert er

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M}$$

mit dem Integral

$$J_0^\infty := \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z} dz.$$

Analog werden die **abgeschnittenen Integrale** $J_{\beta_i}^\infty$ und die **Integrale** $J_0^{\beta_i}$ definiert, wobei dieses Mal die Integrale **komplexe Kurvenintegrale** sind, da die β_i zumindest teilweise komplexe Zahlen sein werden.

Transzendenz von π

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wieder wie folgt in **zwei Teile** zerlegt,

$$0 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_0^\infty + e^{\beta_2} J_0^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_0^\infty \quad (7)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty \\ + e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ + Q_2 \end{array} \right. \quad (8)$$

Transzendenz von π

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wieder wie folgt in **zwei Teile** zerlegt,

$$0 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_0^\infty + e^{\beta_2} J_0^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_0^\infty \quad (7)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty \\ + e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ + Q_2 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Es zeigt sich, dass wieder Q_1 **ganzzahlig ungleich Null** und Q_2 „zu“ klein ist.

Transzendenz von π

Der durch die Multiplikation entstehende Ausdruck wird wieder wie folgt in **zwei Teile** zerlegt,

$$0 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_0^\infty + e^{\beta_2} J_0^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_0^\infty \quad (7)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty \\ + e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ + Q_2 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Es zeigt sich, dass wieder Q_1 **ganzzahlig ungleich Null** und Q_2 „zu“ klein ist.

Dazu wird wieder eine **Variablensubstitution** durchgeführt: Unter Verwendung von

$$z = \hat{z} + \beta_i$$

folgt

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i).$$

Transzendenz von π

Die durch

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

definierte **Funktion G** ist offensichtlich eine ganzzahlige Funktion von β_i .

Transzendenz von π

Die durch

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

definierte **Funktion G** ist offensichtlich eine ganzzahlige Funktion von β_i .
Weiterhin ist wegen

$$0 = g(\beta_i) = b^M (b\beta_i^M + b_1\beta_i^{M-1} + \dots + b_M)$$

und

$$\begin{aligned} g(\hat{z} + \beta_i) &= b^M (b(\hat{z} + \beta_i)^M + b_1(\hat{z} + \beta_i)^{M-1} + \dots + b_M) \\ &= b^M (b\beta_i^M + b_1\beta_i^{M-1} + \dots + b_M) + R(\hat{z}, \beta_i) \end{aligned}$$

G als Polynom in β_i vom **Höchstgrad $m + (M-1)(m+1) = mM + M$** .

Transzendenz von π

Da $g(\hat{z} + \beta_i)$ als Polynom in β_i den Höchsfaktor b^M enthält, enthält das in β_i ganzzahlige Polynom G vom Grad $mM + M$ wegen

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

den Höchsfaktor b^{mM+M}

Transzendenz von π

Da $g(\hat{z} + \beta_i)$ als Polynom in β_i den Höchsfaktor b^M enthält, enthält das in β_i ganzzahlige Polynom G vom Grad $mM + M$ wegen

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

den Höchsfaktor b^{mM+M} und läßt sich, da b^{mM+M} ein Teiler aller Koeffizienten von G ist, mit einem anderen **ganzzahligen Polynom \tilde{G} mit Höchstkoeffizienten Eins** schreiben als $G(\beta_i) = \tilde{G}(b\beta_i)$.

Transzendenz von π

Da $g(\hat{z} + \beta_i)$ als Polynom in β_i den Höchsfaktor b^M enthält, enthält das in β_i ganzzahlige Polynom G vom Grad $mM + M$ wegen

$$e^{\beta_i} J_{\beta_i}^{\infty} = \int_0^{\infty} (\hat{z} + \beta_i)^m (g(\hat{z} + \beta_i))^{m+1} e^{-\hat{z}} d\hat{z} = (m+1)! G(\beta_i)$$

den Höchsfaktor b^{mM+M} und läßt sich, da b^{mM+M} ein Teiler aller Koeffizienten von G ist, mit einem anderen **ganzzahligen Polynom \tilde{G} mit Höchstkoeffizienten Eins** schreiben als $G(\beta_i) = \tilde{G}(b\beta_i)$.

Damit ist die Summe

$$\begin{aligned} e^{\beta_1} J_{\beta_1}^{\infty} + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^{\infty} + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^{\infty} \\ = (m+1)! (\tilde{G}(b\beta_1) + \tilde{G}(b\beta_2) + \dots + \tilde{G}(b\beta_M)) \end{aligned}$$

notwendig nach dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen eine durch $(m+1)!$ teilbare **ganze Zahl**.

Transzendenz von π

Der fehlende erste Term in der Summe Q_1 ,

$$Q_1 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty,$$

ist natürlich auch wieder **ganzzahlig**,

Transzendenz von π

Der fehlende erste Term in der Summe Q_1 ,

$$Q_1 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty,$$

ist natürlich auch wieder **ganzzahlig**, eine genauere Analyse zeigt, dass er die Form

$$\begin{aligned} aJ_0^\infty &= a \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z} dz \\ &= a \int_0^\infty b^{(M+1)(m+1)} z^{m+M(m+1)} e^{-z} + \dots + (g(0))^{m+1} z^m dz \\ &= a \left(b^{(M+1)(m+1)} (m + M(m + 1))! + \dots + (b^M b_M)^{m+1} m! \right) \end{aligned}$$

hat

Transzendenz von π

Der fehlende erste Term in der Summe Q_1 ,

$$Q_1 = aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty,$$

ist natürlich auch wieder **ganzzahlig**, eine genauere Analyse zeigt, dass er die Form

$$\begin{aligned} aJ_0^\infty &= a \int_0^\infty z^m (g(z))^{m+1} e^{-z} dz \\ &= a \int_0^\infty b^{(M+1)(m+1)} z^{m+M(m+1)} e^{-z} + \dots + (g(0))^{m+1} z^m dz \\ &= a \left(b^{(M+1)(m+1)} (m+M(m+1))! + \dots + (b^M b_M)^{m+1} m! \right) \end{aligned}$$

hat, also nach **Teilen mit Rest** die Form

$$\frac{aJ_0^\infty}{m!} = ab^{mM+M} b_M^{m+1} \pmod{m+1}.$$

Transzendenz von π

Insgesamt gilt daher also

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_1}{m!} &= \frac{aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty}{m!} \\
 &= \frac{a (b^{(M+1)(m+1)} (m + M(m + 1))! + \dots + (b^M b_M)^{m+1} m!)}{m!} \\
 &\quad + \frac{(m + 1)!}{m!} (\tilde{G}(b\beta_1) + \tilde{G}(b\beta_2) + \dots + \tilde{G}(b\beta_M)) \\
 &= ab^{mM+M} b_M^{m+1} \pmod{m + 1}.
 \end{aligned}$$

Transzendenz von π

Insgesamt gilt daher also

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_1}{m!} &= \frac{aJ_0^\infty + e^{\beta_1} J_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} J_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} J_{\beta_M}^\infty}{m!} \\
 &= \frac{a(b^{(M+1)(m+1)}(m+M(m+1))! + \dots + (b^M b_M)^{m+1} m!)}{m!} \\
 &\quad + \frac{(m+1)!}{m!} (\tilde{G}(b\beta_1) + \tilde{G}(b\beta_2) + \dots + \tilde{G}(b\beta_M)) \\
 &= ab^{mM+M} b_M^{m+1} \pmod{m+1}.
 \end{aligned}$$

Wenn jetzt $m+1$ eine **Primzahl größer als a , b und b_M** ist, so ist

$$\mathbb{Z} \ni \frac{Q_1}{m!} \neq 0.$$

Transzendenz von π

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Term Q_2 zu,

$$Q_2 = e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}.$$

Transzendenz von π

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Term Q_2 zu,

$$Q_2 = e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}.$$

Die Integrale werden wieder durch Maxima auf den geraden Strecken zwischen Null und β_j (in \mathbb{C}) **abgeschätzt**,

$$|zg(z)| \leq E := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0, \beta_j]} |zg(z)|,$$

$$|g(z)e^{-z}| \leq e := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0, \beta_j]} |g(z)e^{-z}|,$$

Transzendenz von π

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Term Q_2 zu,

$$Q_2 = e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}.$$

Die Integrale werden wieder durch Maxima auf den geraden Strecken zwischen Null und β_j (in \mathbb{C}) **abgeschätzt**,

$$|zg(z)| \leq E := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0, \beta_j]} |zg(z)|,$$

$$|g(z)e^{-z}| \leq e := \max_{z \in \cup_{j=1}^M [0, \beta_j]} |g(z)e^{-z}|,$$

es gilt

$$|J_0^{\beta_j}| = \left| \int_0^{\beta_j} z^m (g(z))^{m+1} e^{-z} dz \right| < |\beta_j| e E^m.$$

Transzendenz von π

Damit ist aber Q_2 **beschränkt** durch

$$\left| \frac{Q_2}{m!} \right| = \left| \frac{e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}}{m!} \right| \ll \frac{\overbrace{(|\beta_1 e^{\beta_1}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}|)}^c}{m!} e E^m.$$

Transzendenz von π

Damit ist aber Q_2 **beschränkt** durch

$$\left| \frac{Q_2}{m!} \right| = \left| \frac{e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}}{m!} \right| \leq \frac{\overbrace{(|\beta_1 e^{\beta_1}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}|)}^c}{m!} e E^m.$$

Wieder können wir m so gross wählen, dass dieser Ausdruck **kleiner als Eins** wird und damit die Gleichung

$$0 = \frac{Q_1}{m!} + \frac{Q_2}{m!}$$

unmöglich zu erfüllen ist.

Transzendenz von π

Damit ist aber Q_2 **beschränkt** durch

$$\left| \frac{Q_2}{m!} \right| = \left| \frac{e^{\beta_1} J_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} J_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} J_0^{\beta_M}}{m!} \right| \leq \frac{\overbrace{(|\beta_1 e^{\beta_1}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}|)}^c}{m!} e E^m.$$

Wieder können wir m so gross wählen, dass dieser Ausdruck **kleiner als Eins** wird und damit die Gleichung

$$0 = \frac{Q_1}{m!} + \frac{Q_2}{m!}$$

unmöglich zu erfüllen ist.

Demnach ist die Zahl π **transzendent**. Das beweist die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal.

Fazit

Jeder, der π **nur auf dem Rechner** als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. **16 Dezimalstellen**, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Fazit

Jeder, der π **nur auf dem Rechner** als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. **16 Dezimalstellen**, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Auch interessant, aber hier nicht bewiesen: Die Zahl $e^\pi = (-1)^{-i} = (-1)^{-\sqrt{-1}}$ ist ebenfalls **transzendent**.

Fazit

Jeder, der π **nur auf dem Rechner** als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. **16 Dezimalstellen**, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Auch interessant, aber hier nicht bewiesen: Die Zahl $e^\pi = (-1)^{-i} = (-1)^{-\sqrt{-1}}$ ist ebenfalls **transzendent**.

Leider ist nicht mehr genug Zeit um dieses **interessante Gebiet** hinreichend zu vertiefen ...

Fazit

Jeder, der π **nur auf dem Rechner** als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. **16 Dezimalstellen**, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Auch interessant, aber hier nicht bewiesen: Die Zahl $e^\pi = (-1)^{-i} = (-1)^{-\sqrt{-1}}$ ist ebenfalls **transzendent**.

Leider ist nicht mehr genug Zeit um dieses **interessante Gebiet** hinreichend zu vertiefen ...

Danke für die Aufmerksamkeit!

Fazit

Jeder, der π **nur auf dem Rechner** als ANSI/IEEE 754 `double`-Zahl (also mit 64 Bit, nicht `single`, also 32 Bit) benötigt, also auf ca. **16 Dezimalstellen**, dem sei die folgende Approximation nach Hermite (Hermite, 1859), Ramanujan (Ramanujan, 1914), Gardner (Gardner, 1975a; Gardner, 1975b), siehe auch Weber, (Weber, 1908, Seite 462), und Heegner, (Heegner, 1952, Seite 232), ans Herz gelegt:

$$\pi - \frac{3}{\sqrt{163}} \ln(640320) < 0.222 \cdot 10^{-15}.$$

Auch interessant, aber hier nicht bewiesen: Die Zahl $e^\pi = (-1)^{-i} = (-1)^{-\sqrt{-1}}$ ist ebenfalls **transzendent**.

Leider ist nicht mehr genug Zeit um dieses **interessante Gebiet** hinreichend zu vertiefen ...

Danke für die Aufmerksamkeit! **War nett, mal wieder die Erstsemester verschaukeln zu dürfen ; -)**

Cotes, R. (1714).

Logometria.

Philosophical Transactions, XXIX:5–45.

Die einzige Veröffentlichung von Roger Cotes zu Lebzeiten.

<http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1714.0002>

de Stainville, J. (1815).

Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie.

Ve Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.

<http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/melange-danalyse-algebrique-et-de-geometrie>

Euler, L. (1744).

De fractionibus continuis. Dissertatio.

Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 9:98–137.

<http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E071.html>

Gardner, M. (1975a).

Mathematical Games: Six sensational discoveries that somehow or another escaped public attention.

Scientific American, 232:127–131.

Aprilscherz.

Gardner, M. (1975b).

Mathematical Games: On tessellating the plane with convex polygons.

Scientific American, 232:112–117.

Enthält Kommentar zum vorangegangenen Aprilscherz.

Gel'fond, A. O. (1960).

Transcendental and algebraic numbers.

Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. Dover Publications Inc., New York.

Gordan, P. (1893).

Transcendenz von e und π .

Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):222–224.

[http:](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254581)

[//resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254581](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254581)

Heegner, K. (1952).

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Mathematische Zeitschrift, 56:227–253.

<http://dx.doi.org/10.1007/BF01174749>

Hermite, C. (1859).

Sur la théorie des équations modulaires.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 49:16–24, 110–118, 141–144.

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3006f>

Hermite, C. (1873).

Sur la fonction exponentielle.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 77:18–24.

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3034n>

Hilbert, D. (1893a).

Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π .

Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):216–219.

[http:](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254565)

[//resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254565](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254565)

Hilbert, D. (1893b).

Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π .

Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 1893(2):113–116.

[http:](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002526492)

[//resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002526492](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002526492)

Hurwitz, A. (1893).

Beweis der Transcendenz der Zahl e .

Mathematische Annalen, 43(2. und 3. (Doppel-)Heft):220–221.

[http:](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254573)

[//resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254573](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002254573)

Lambert, J. H. (1768).

Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, XVII(Année MDCCLXI):265–322.

Der Band zum Jahr 1761 (MDCCLXI) wurde 1768 herausgegeben.

<http://www.kuttaka.org/~JHL/L1768b.html>

Lambert, J. H. (1770).

Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.

Number II in Theil. Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin.

Siehe Vorrede und Kapitel Fünf.

<http://www.kuttaka.org/~JHL/L1770a.html>

Lindemann, F. (1882b).

Ueber die Zahl π .

Mathematische Annalen, XX(2):213–225.

[http:](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002246910)

[//resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002246910](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002246910)

Lindemann, F. (1882a).

Über die Ludolph'sche Zahl.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1882(Zweiter Halbband. Juni bis December):679–682.

http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=10-sitz/1882-2&seite:int=102

Liouville, J. (1844a).

Mémoires et communications des membres et des correspondants de l'académie.

Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, XVIII(20):883–885.

Séance du Lundi 13 Mai 1844.

<http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/propos-de-l'existence-des-nombres-transcendants>

Liouville, J. (1844b).

Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance.

Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, XVIII(20):910–911.

Théorie des Nombres.

Liouville, J. (1851).

Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Série 1, 16:133–142.

http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1851_1_16_A5_0

Lützen, J. (1990).

Joseph Liouville 1809–1882: master of pure and applied mathematics, Volume 15 of *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*.

Springer-Verlag, New York.

Niven, I. (1947).

A simple proof that π is irrational.

Bulletin of the American Mathematical Society, 53:509.

<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08821-2>

Ramanujan, S. (1913–1914).

Modular equations and approximations to π .

Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 45:350–372.

Turing, A. M. (1937).

On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.

Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, XLII(1):230–265.

<http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>

Turing, A. M. (1938).

On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction.

Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 43(1):544–546.

<http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-43.6.544>

Weber, H. (1908).

Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen, Dritter Band des
Lehrbuch der Algebra.

F. Vieweg, Braunschweig, Zweite Auflage.

[http:](http://www.archive.org/details/lehrbuchderalgeb03webeuoft)

[//www.archive.org/details/lehrbuchderalgeb03webeuoft](http://www.archive.org/details/lehrbuchderalgeb03webeuoft)

Weierstrass, K. (1885).

Zu Hrnn. Lindemann's Abhandlung: „Über die Ludolph'sche Zahl“.

*Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der
Wissenschaften zu Berlin*, Jahrgang 1885(Zweiter Halbband, Juni bis
December):919, 1067–1085.

[http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/
digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=
10-sitz/1885-2&seite:int=403](http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=10-sitz/1885-2&seite:int=403)