

Numerische Verfahren

Übungen, Blatt 3

Aufgabe 1: (Thema: Fehler(schranken) der Polynominterpolation und der Interpolation mittels Splines.)

Bearbeiten Sie Aufgabe 3 des Aufgabenblattes 2. Alternativ zu den dort geforderten Diskussionen mit ihren Kommilitonen können Sie auch die Lösungshinweise, welche im Netz zur Verfügung stehen, verifizieren.

Aufgabe 2: (Thema: Fehlerordnung von Quadraturformeln.)

a) In Bemerkung 3.8 des Skriptes wird der Fehler

$$E(f) := \int_0^1 f(x) dx - Q(f)$$

einer Quadraturformel $Q(f)$ als linear charakterisiert. Verifizieren Sie diese Eigenschaft. Es gilt die übliche Addition von Funktionen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und die übliche Multiplikation mit Skalaren

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

b) Welche Fehlerordnung hat die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{1}{3} \left(2f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) \right) \approx \int_0^1 f(x) dx?$$

c) Der Peano Kern zu der Quadraturformel aus b) ändert sein Vorzeichen auf $[0, 1]$ nicht. Berechnen Sie die Fehlerkonstante dieser Quadraturformel.

Aufgabe 3: (Thema: einfache, zusammengesetzte und GAUSS-Quadratur.)

Es sind die drei Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) dx = e^{-1} \approx 0.3678794412 \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(2) \approx 0.6931471806 \\ I_3 &= \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \approx 0.6666666667 \end{aligned}$$

näherungsweise zu integrieren.

a) Approximieren Sie die Integrale mit den abgeschlossenen NEWTON-COTES-Formeln aus Tabelle 3.1 des Skriptes (Seite 28) für n von 1 bis 4. Was beobachten Sie?

- b) Approximieren Sie dieselben Integrale mit der summierten SIMPSON-Regel (Seite 29 des Skriptes). Verfeinern Sie die Zerlegungen stückweise. Was beobachten Sie jetzt?
- c) Approximieren Sie die Integrale mittels (auf das Intervall $[0, 1]$ angewandter) GAUSS-Quadratur zu $w(x) \equiv 1$ für n von 1 bis 5. (Tipp: Gewichte und Knoten für das Intervall $[-1, 1]$ für n von 1 bis 3 sind auf Seite 36 des Skriptes zu finden. Für n gleich 4 bzw. 5 können Sie z.B. <http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html> konsultieren). Was für ein Verhalten beobachten Sie?

Wie bewerten Sie die erhaltenen Ergebnisse bezüglich Aufwand und Genauigkeit? Welches Verfahren würden Sie unter welchen Umständen verwenden?