Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Numerische Simulation, E-10
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Sommersemester 2008

Numerische Verfahren

Übungen und Lösungen, Blatt 3

Aufgabe 1: (Thema: Fehler(schranken) der Polynominterpolation und der Interpolation mittels Splines.)

Bearbeiten Sie Aufgabe 3 des Aufgabenblattes 2. Alternativ zu den dort geforderten Diskussionen mit ihren Kommilitonen können Sie auch die Lösungshinweise, welche im Netz zur Verfügung stehen, verifizieren.

Lösung zu Aufgabe 1:

Siehe Lösungshinweise zu Aufgabe 3 des Aufgabenblattes 2.

Aufgabe 2: (Thema: Fehlerordnung von Quadraturfomeln.)

a) In Bemerkung 3.8 des Skriptes wird der Fehler

$$E(f) := \int_0^1 f(x)dx - Q(f)$$

einer Quadraturformel $Q(f)$ als linear charakterisiert. Verifizieren Sie diese Eigenschaft. Es gilt die übliche Addition von Funktionen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und die übliche Multiplikation mit Skalaren

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

b) Welche Fehlerordnung hat die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{1}{3}\left(2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})\right) \approx \int_0^1 f(x)\,dx?$$

c) Der Peano Kern zu der Quadraturformel aus b) ändert sein Vorzeichen auf $[0,1]$ nicht. Berechnen Sie die Fehlerkonstante dieser Quadraturformel.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es ist zu zeigen, dass für zwei auf $[0,1]$ integrierbare Funktionen f und g sowie für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ der Fehler E die folgende Eigenschaft besitzt:

$$E(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot E(f) + \mu \cdot E(g).$$

Für die Knoten $x_0, \ldots, x_n \in [0,1]$ und den Gewichten $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ ist nach Skript $Q(f)$ gegeben als

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

Mit dieser Definition, der Linearität des Integrals und unter Berücksichtigung der in der Aufgabe definierten Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ergibt sich

$$\begin{aligned}
E(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= \int_0^1 (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \omega_i (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x_i) \\
&= \int_0^1 \big(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\big)dx - \sum_{i=0}^{n} \omega_i \big(\lambda \cdot f(x_i) + \mu \cdot g(x_i)\big) \\
&= \lambda \int_0^1 f(x)dx + \mu \int_0^1 g(x)dx - \lambda \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) - \mu \sum_{i=0}^{n} \omega_i g(x_i) \\
&= \lambda \left[\int_0^1 f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)\right] + \mu \left[\int_0^1 g(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \omega_i g(x_i)\right] \\
&= \lambda \cdot E(f) + \mu \cdot E(g).
\end{aligned}$$

b) Eigentlich sollte man sofort die Quadraturformel als die offene Newton-Cotes-Formel für $n = 2$ erkennen (Skript, Seite 28 und 29), und dann aufgrund der Konstruktion der Newton-Cotes-Formeln (Bemerkung 3.9 im Skript, Seite 31) wissen, dass die Quadraturformel (wenigstens) die Fehlerordnung $3 = n + 1$ hat. Also müssen wir nur noch herausfinden, ob die Formel nicht sogar eine höhere Ordnung besitzt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \quad &= \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{64}, \\
\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5} \quad &\neq \quad \frac{37}{192} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{256} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{256}.
\end{aligned}$$

Diese Aufgabe läßt sich aber auch ohne dieses Wissen noch schnell bewältigen, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Fehlerordnung einer Quadraturformel durch den Grad des Polynomes gegeben ist, das als erstes *nicht* korrekt integriert wird (Definition 3.7 des Skriptes, Seite 31). Dazu hätten wir *zusätzlich* noch diese Rechungen durchführen müssen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1\,dx = 1 \quad &= \quad 1 = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1, \\
\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad &= \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}, \\
\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \quad &= \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

Die Quadraturformel hat also *sogar* die Ordnung 4, wie die Simpson-Formel, die auch die Fehlerordnung 4 erreicht.

c) Wir gehen wie in Bemerkung 3.15 des Skriptes vor. Nach b) wissen wir, dass die Fehlerordnung des Verfahrens $m = 4$ ist. Ergo ergibt sich die Fehlerkonstante c_4 zu

$$c_4 = \frac{E(x^4)}{4!}.$$

In Zahlen:

$$c_4 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{37}{192}}{24} = \frac{7}{960 \cdot 24} = \frac{7}{23040}.$$

Aufgabe 3: (Thema: einfache, zusammengesetzte und Gauss-Quadratur.)

Es sind die drei Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1 - \frac{1}{e^x})\, dx &&= e^{-1} &&\approx 0.3678794412 \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx &&= \ln(2) &&\approx 0.6931471806 \\ I_3 &= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx &&= \frac{2}{3} &&\approx 0.6666666667 \end{aligned}$$

näherungsweise zu integrieren.

a) Approximieren Sie die Integrale mit den abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln aus Tabelle 3.1 des Skriptes (Seite 28) für n von 1 bis 4. Was beobachten Sie?

b) Approximieren Sie dieselben Integrale mit der summierten Simpson-Regel (Seite 29 des Skriptes). Verfeinern Sie die Zerlegungen stückweise. Was beobachten Sie jetzt?

c) Approximieren Sie die Integrale mittels (auf das Intervall $[0, 1]$ angewandter) Gauss-Quadratur zu $w(x) \equiv 1$ für n von 1 bis 5. (Tipp: Gewichte und Knoten für das Intervall $[-1, 1]$ für n von 1 bis 3 sind auf Seite 36 des Skriptes zu finden. Für n gleich 4 bzw. 5 können Sie z.B. `http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html` konsultieren). Was für ein Verhalten beobachten Sie?

Wie bewerten Sie die erhaltenen Ergebnisse bezüglich Aufwand und Genauigkeit? Welches Verfahren würden Sie unter welchen Umständen verwenden?

Lösung zu Aufgabe 3: Die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln sowie die summierte Simpson-Regel sind direkt im Skript für das Reverenzintervall $[0, 1]$ zu finden. Für die Gauss-Quadratur stellt sich der Sachverhalt dezent komplexer dar. Zwar sind mit der angeführten URL und den Informationen im Skript die folgenden Knoten und Gewichte gegeben

$$\begin{aligned} 1: \quad & w = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \\ & x = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \\ 2: \quad & w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ & x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3: \quad & w = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \\ & x = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 4: \quad & w = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 18+\sqrt{30} & 18-\sqrt{30} & 18-\sqrt{30} & 18+\sqrt{30} \end{pmatrix}, \\ & x = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -\sqrt{525-70\sqrt{30}} & -\sqrt{525+70\sqrt{30}} & \sqrt{525-70\sqrt{30}} & \sqrt{525+70\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \\ 5: \quad & w = \frac{1}{900} \begin{pmatrix} 322-13\sqrt{70} & 322+13\sqrt{70} & 512 & 322+13\sqrt{70} & 322-13\sqrt{70} \end{pmatrix}, \\ & x = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -\sqrt{245+14\sqrt{70}} & -\sqrt{245-14\sqrt{70}} & 0 & \sqrt{245-14\sqrt{70}} & \sqrt{245+14\sqrt{70}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

jedoch sind diese für das Intervall $[-1, 1]$ berechnet. Um die Knoten und Gewichte für das gewünschte Intervall $[0, 1]$ zu erhalten, verwenden wir eine einfache lineare Transformation. Durch die lineare Substitution

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{b+a}{2}, \qquad dx = \frac{b-a}{2} \cdot d\xi$$

wird das Intervall $a \leqslant x \leqslant b$ auf das Intervall $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ transformiert. Für unseren Fall, i.e., $a = 0$ und $b = 1$, erhalten wir die Transformation

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})\,d\xi.$$

Damit können wir unsere Gewichte und Knoten einsetzen, um die Funktion

$$\hat{f}(\xi) := f(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})$$

über $[-1, 1]$ zu integrieren, und erhalten so das Doppelte der gewünschten Näherungen. Die Implementation der Quadraturen für die gegebenen drei Integrale ist in dem M-File `aufg03f01_08.m` enthalten. Ohne Parameter aufgerufen, werden die berechneten Werte und die exakten Werte ausgegeben. Als Rückgabewert werden alle Werte in Form einer Matrix zurückgegeben. Bei einem Aufruf der Form

```
[vals,errs] = aufg03f01_08;
```

werden die genäherten Werte *und* die Fehler dieser Näherungen gegenüber dem exakten Wert zurückgegeben.

Sie werden wahrscheinlich feststellen, dass die Legendre-Gauss-Quadratur bezüglich der Genauigkeit am besten abschneidet, zu sehen am besten bei dem ersten Integral und der Formel für $n = 5$. Dort ist der Fehler in der Größenordnung von 10^{-13}, was für so wenige Knoten beachtlich ist. Die Newton-Cotes-Formeln haben den Vorteil, dass man Sie leicht im Kopf auswerten kann (können sollte). Die summierte Simpson-Regel ist immer noch leichter zu implementieren als die optimale Gauss-Quadratur. Deshalb wird Sie bei Verwendung eines Computers sicherlich zuerst herangezogen werden, bei höheren Genauigkeitsanforderungen wird man dann auf Gauss-Quadratur wechseln.