

jpmzemke@ScienceSlam: Krylov-Raum-Verfahren und Rundungsfehler

Jens-Peter M. Zemke
zemke@tu-harburg.de

Institut für Numerische Simulation
Technische Universität Hamburg-Harburg

16. Mai 2011

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Motivation

... die Wahrheit, Teil I

Krylov-Raum-Verfahren

... die Wahrheit, Teil II

Potentialtheorie

... die Wahrheit, Teil III

Rundungsfehler

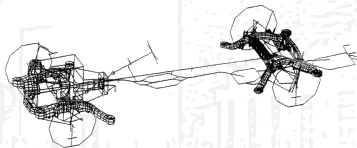
... die Wahrheit, Teil IV

Quantenmechanik: $\hbar \approx 10^{-16}$

Forschung (← I am here)

Wie Mathematiker die Welt sehen ...

70er: 28.924 DoF,

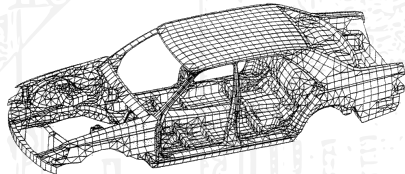


Die Daten werden mit freundlicher Genehmigung verwendet, die Originale:
© UGS Corp. 2007, Louis Komzisk (Siemens PLM Software/NX NASTRAN).

Wie Mathematiker die Welt sehen . . .

70er: 28.924 DoF,

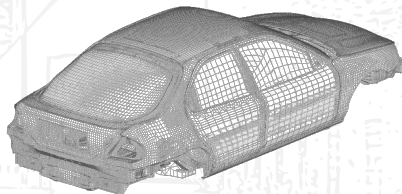
80er: ca. 264 Tsd. DoF,



Die Daten werden mit freundlicher Genehmigung verwendet, die Originale:
© UGS Corp. 2007, Louis Komzsik (Siemens PLM Software/NX NASTRAN).

Wie Mathematiker die Welt sehen . . .

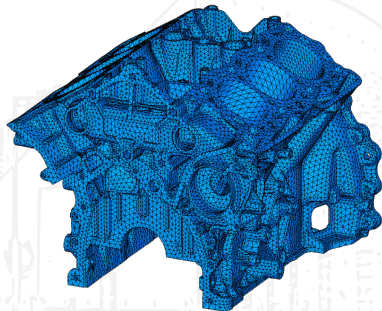
70er: 28.924 DoF,
80er: ca. 264 Tsd. DoF,
90er: ca. **1.6 Mio. DoF**,



Die Daten werden mit freundlicher Genehmigung verwendet, die Originale:
© UGS Corp. 2007, Louis Komzisk (Siemens PLM Software/NX NASTRAN).

Wie Mathematiker die Welt sehen . . .

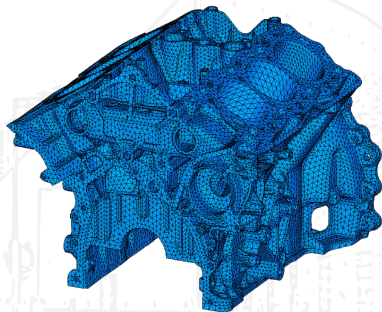
70er: 28.924 DoF,
80er: ca. 264 Tsd. DoF,
90er: ca. 1.6 Mio. DoF,
00er: ca. **35 Mio. DoF**,



Die Daten werden mit freundlicher Genehmigung verwendet, die Originale:
© UGS Corp. 2007, Louis Komzsik (Siemens PLM Software/NX NASTRAN).

Wie Mathematiker die Welt sehen . . .

70er: 28.924 DoF,
80er: ca. 264 Tsd. DoF,
90er: ca. 1.6 Mio. DoF,
00er: ca. 35 Mio. DoF,
10er: **1 Mrd. DoF.**



Die Daten werden mit freundlicher Genehmigung verwendet, die Originale:
© UGS Corp. 2007, Louis Komzisk (Siemens PLM Software/NX NASTRAN).

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?



Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum?

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum? Sinnvoll: **Wachsende Dimension**.

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum? Sinnvoll: **Wachsende Dimension**. Erst $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$,

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum? Sinnvoll: **Wachsende Dimension**. Erst $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$,

$$\mathbf{Q}_1 := \mathbf{q}_1 := \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{H}_1 := \mathbf{Q}_1^H \mathbf{A} \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{z}_1 := \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{x}_1 := \mathbf{Q}_1 \mathbf{z}_1.$$

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum? Sinnvoll: **Wachsende Dimension**. Erst $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$,

$$\mathbf{Q}_1 := \mathbf{q}_1 := \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{H}_1 := \mathbf{Q}_1^H \mathbf{A} \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{z}_1 := \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{x}_1 := \mathbf{Q}_1 \mathbf{z}_1.$$

Dann $\mathcal{K}_2 := \text{span} \{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0 \}$.

Wie entstehende GLS/Eigenwertaufgaben lösen ...

Wie löst man diese riesigen Gleichungssysteme/Eigenwertaufgaben?

Nein, nicht **Gauß**, nicht **LR**. Zu groß. Stattdessen **Projektion** ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$):

- ▶ **Orthogonale Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^H = \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^H$. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$.
Dabei $\mathbf{Q}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .
- ▶ **Schiefe Projektion**: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^H = \mathbf{B}_k (\hat{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{B}_k)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_k^H$. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^H$ möglich.
Dabei $\hat{\mathbf{Q}}_k^H \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{B}_k, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ voller (Spalten-)Rang k .

Woher Unterraum? Sinnvoll: **Wachsende Dimension**. Erst $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$,

$$\mathbf{Q}_1 := \mathbf{q}_1 := \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{H}_1 := \mathbf{Q}_1^H \mathbf{A} \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{z}_1 := \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{x}_1 := \mathbf{Q}_1 \mathbf{z}_1.$$

Dann $\mathcal{K}_2 := \text{span} \{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0 \}$. **Krylov-Raum** \mathcal{K}_k quasi als „Notlösung“. Immer letzter Vektor \mathbf{q}_{k-1} mit \mathbf{A} multipliziert kommt hinzu,

$$\mathcal{K}_k := \text{span} \{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{r}_0 \} = \text{span} \{ \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k \}.$$

Krylov-Räume und Hessenberg-Zerlegungen

Es gilt nach k Schritten die folgende **Hessenberg-Zerlegung**,

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{H}_k,$$

Krylov-Räume und Hessenberg-Zerlegungen

Es gilt nach k Schritten die folgende **Hessenberg-Zerlegung**,

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{H}_k,$$

wobei

- ▶ $\mathbf{Q}_{k+1} = (\mathbf{Q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \in \mathbb{C}^{n \times (k+1)}$ **Basisvektoren** sammelt,
- ▶ $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{(k+1) \times k}$ eine erweiterte **Hessenberg-Matrix** ist, also eine obere Dreiecksmatrix mit einer zusätzlichen unteren Diagonalen.

Krylov-Räume und Hessenberg-Zerlegungen

Es gilt nach k Schritten die folgende **Hessenberg-Zerlegung**,

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{H}_k,$$

wobei

- ▶ $\mathbf{Q}_{k+1} = \left(\mathbf{Q}_k, \mathbf{q}_{k+1} \right) \in \mathbb{C}^{n \times (k+1)}$ **Basisvektoren** sammelt,
- ▶ $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{(k+1) \times k}$ eine erweiterte **Hessenberg-Matrix** ist, also eine obere Dreiecksmatrix mit einer zusätzlichen unteren Diagonalen.

Viele Krylov-Raum-Verfahren berechnen **Approximationen** an die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}_0$ durch

$$\mathbf{z}_k := \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{x}_k := \mathbf{Q}_k \mathbf{z}_k, \quad \text{wobei } \mathbf{H}_k =: \begin{pmatrix} \mathbf{H}_k \\ h_{k+1,k} \mathbf{e}_k^T \end{pmatrix}, \quad (\text{OR})$$

$$\text{oder } \mathbf{z}_k := \mathbf{H}_k^\dagger \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}_0\|, \quad \mathbf{x}_k := \mathbf{Q}_k \mathbf{z}_k. \quad (\text{MR})$$

Krylov-Räume und Polynome

Es gilt

$$\mathbf{x} \in \mathcal{K}_k \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j \mathbf{r}_0 c_j = p(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j. \quad (1)$$

Krylov-Räume und Polynome

Es gilt

$$\mathbf{x} \in \mathcal{K}_k \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j \mathbf{r}_0 c_j = p(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j. \quad (1)$$

„Optimale“ Verfahren (Arnoldi/Lanczos/CG): Polynome χ_k mit

$$\|\chi_k(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0\|_2 = \min_{\substack{\chi_k \in \Pi_k, \\ \chi_k(z) = z^k + \dots}} \chi_k(z) = \det(z\mathbf{I}_k - \mathbf{H}_k).$$

Krylov-Räume und Polynome

Es gilt

$$\mathbf{x} \in \mathcal{K}_k \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j \mathbf{r}_0 c_j = p(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j. \quad (1)$$

„Optimale“ Verfahren (Arnoldi/Lanczos/CG): Polynome χ_k mit

$$\|\chi_k(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0\|_2 = \min_{\substack{\chi_k \in \Pi_k, \\ \chi_k(z) = z^k + \dots}} \chi_k(z) = \det(z\mathbf{I}_k - \mathbf{H}_k).$$

Nullstellen (**Ritzwerte**) von χ_k approximieren Eigenwerte von \mathbf{A} . Welche?

Krylov-Räume und Polynome

Es gilt

$$\mathbf{x} \in \mathcal{K}_k \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j \mathbf{r}_0 c_j = p(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j. \quad (1)$$

„Optimale“ Verfahren (Arnoldi/Lanczos/CG): Polynome χ_k mit

$$\|\chi_k(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0\|_2 = \min_{\substack{\chi_k \in \Pi_k, \\ \chi_k(z) = z^k + \dots}} \chi_k(z) = \det(z\mathbf{I}_k - \mathbf{H}_k).$$

Nullstellen (**Ritzwerte**) von χ_k approximieren Eigenwerte von \mathbf{A} . Welche?

Approximation an Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}_0$ im Schritt k durch **Interpolation**:

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{L}_k[z^{-1}](\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad \mathcal{L}_k[z^{-1}](z) = \frac{\det(\mathbf{I}_k - z\mathbf{H}_k^{-1}) - 1}{z}.$$

Krylov-Räume und Polynome

Es gilt

$$\mathbf{x} \in \mathcal{K}_k \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j \mathbf{r}_0 c_j = p(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j. \quad (1)$$

„Optimale“ Verfahren (Arnoldi/Lanczos/CG): Polynome χ_k mit

$$\|\chi_k(\mathbf{A}) \mathbf{r}_0\|_2 = \min_{\substack{\chi_k \in \Pi_k, \\ \chi_k(z) = z^k + \dots}} \chi_k(z) = \det(z\mathbf{I}_k - \mathbf{H}_k).$$

Nullstellen (**Ritzwerte**) von χ_k approximieren Eigenwerte von \mathbf{A} . Welche?

Approximation an Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}_0$ im Schritt k durch **Interpolation**:

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{L}_k[z^{-1}](\mathbf{A}) \mathbf{r}_0, \quad \mathcal{L}_k[z^{-1}](z) = \frac{\det(\mathbf{I}_k - z\mathbf{H}_k^{-1}) - 1}{z}.$$

Konvergenz abhängig von Ritzwerten.

Krylov-Räume und Potentialtheorie

„Potentialtheorie“ (Trefethen/Bau (1997); Kuijlaars, Beckermann (2000)).

Krylov-Räume und Potentialtheorie

„Potentialtheorie“ (Trefethen/Bau (1997); Kuijlaars, Beckermann (2000)).

Eigenwerte von \mathbf{A} in Intervall $[-1, 1]$. Gleichgewichtsverteilung von elektrischer Ladung:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Krylov-Räume und Potentialtheorie

„Potentialtheorie“ (Trefethen/Bau (1997); Kuijlaars, Beckermann (2000)).

Eigenwerte von \mathbf{A} in Intervall $[-1, 1]$. Gleichgewichtsverteilung von elektrischer Ladung:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Äquidistant verteilte Eigenwerte haben z. B. Verteilung

$$\frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Krylov-Räume und Potentialtheorie

„**Potentialtheorie**“ (Trefethen/Bau (1997); Kuijlaars, Beckermann (2000)).

Eigenwerte von \mathbf{A} in Intervall $[-1, 1]$. **Gleichgewichtsverteilung** von elektrischer Ladung:

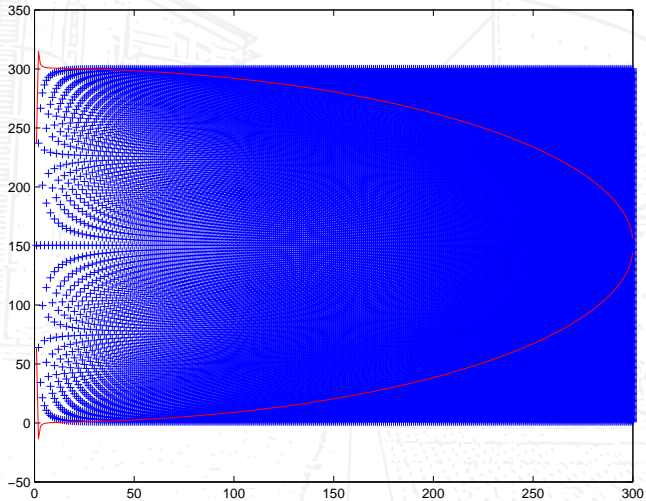
$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Äquidistant verteilte Eigenwerte haben z. B. Verteilung

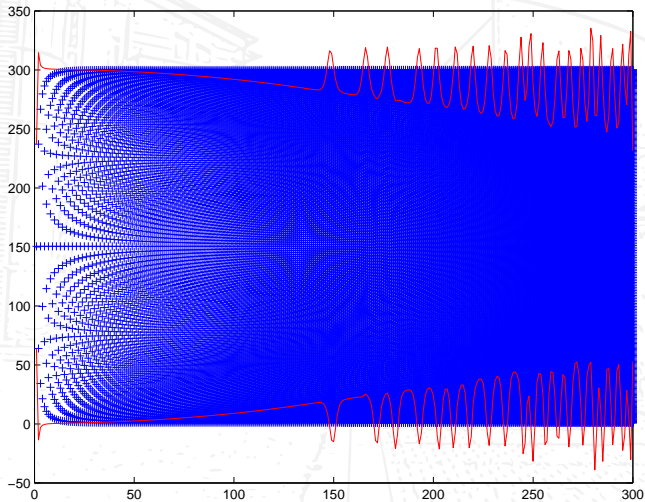
$$\frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Eigenwert-Konvergenz außerhalb von $[-\sqrt{1-k/n}, \sqrt{1-k/n}]$.

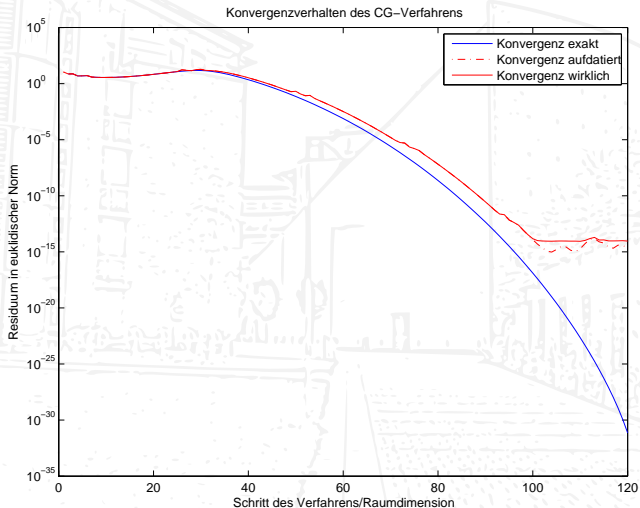
Wie schnell diese Verfahren konvergieren ...



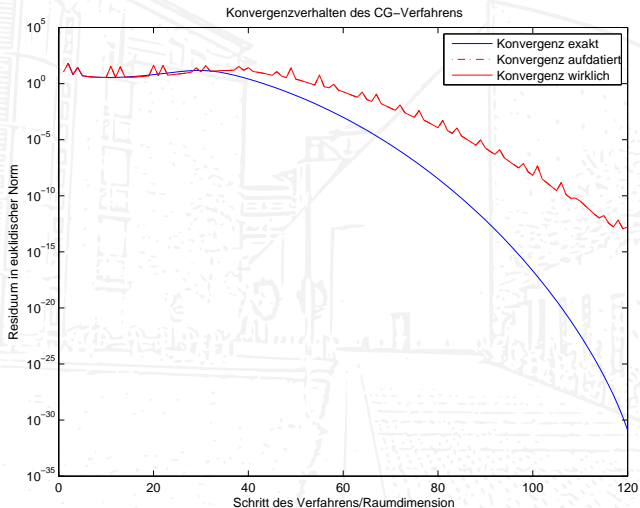
Wie schnell diese Verfahren real konvergieren ...



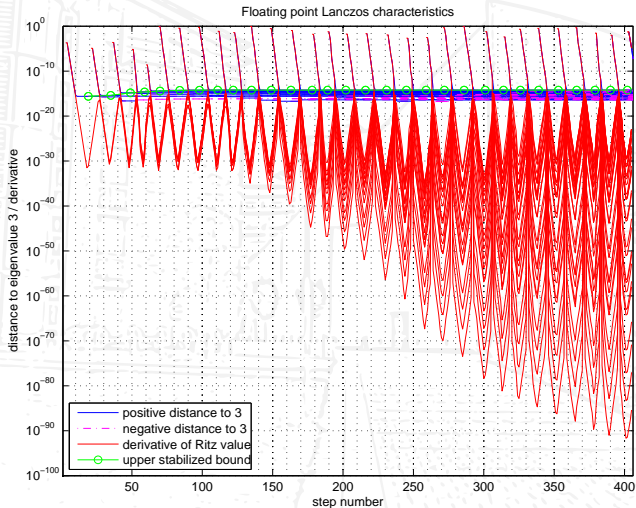
Wie schnell diese Verfahren real konvergieren ...



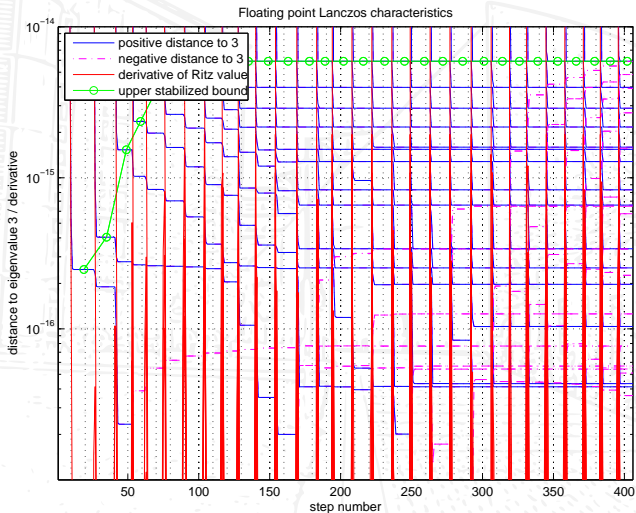
Wie schnell diese Verfahren real konvergieren ...



Wie schnell diese Verfahren real konvergieren ...



Wie schnell diese Verfahren real konvergieren ...



An den Haaren herbeigezogene Verbindung . . .

Potentialtheorie: Konvergenz gegen Eigenwerte in Bereichen „zu geringer“
Ladungsdichte verglichen mit Gleichgewichtsverteilung im Intervall $[-1, 1]$.

An den Haaren herbeigezogene Verbindung . . .

Potentialtheorie: **Konvergenz gegen Eigenwerte in Bereichen „zu geringer“ Ladungsdichte verglichen mit Gleichgewichtsverteilung** im Intervall $[-1, 1]$.

Elektronen: **Fermionen**, können nur benachbarte Zustände einnehmen, nicht denselben (vgl. Bose-Einstein-Kondensat).

An den Haaren herbeigezogene Verbindung . . .

Potentialtheorie: **Konvergenz gegen Eigenwerte in Bereichen „zu geringer“ Ladungsdichte** verglichen mit Gleichgewichtsverteilung im Intervall $[-1, 1]$.

Elektronen: **Fermionen**, können nur benachbarte Zustände einnehmen, nicht denselben (vgl. Bose-Einstein-Kondensat).

Neue Untersuchungen: **Quantenmechanische Effekte** (analog **Zeeman-Effekt**) bereits bei

$$\hbar = \epsilon = 2^{-53} \approx 10^{-16}.$$

An den Haaren herbeigezogene Verbindung . . .

Potentialtheorie: **Konvergenz gegen Eigenwerte in Bereichen „zu geringer“ Ladungsdichte** verglichen mit Gleichgewichtsverteilung im Intervall $[-1, 1]$.

Elektronen: **Fermionen**, können nur benachbarte Zustände einnehmen, nicht denselben (vgl. Bose-Einstein-Kondensat).

Neue Untersuchungen: **Quantenmechanische Effekte** (analog **Zeeman-Effekt**) bereits bei

$$\hbar = \epsilon = 2^{-53} \approx 10^{-16}.$$

Cluster von Ritzwerten, aus „teil-stabilisierten“ Ritzwerten zusammengesetzt.

An den Haaren herbeigezogene Verbindung ...

Potentialtheorie: **Konvergenz gegen Eigenwerte in Bereichen „zu geringer“ Ladungsdichte** verglichen mit Gleichgewichtsverteilung im Intervall $[-1, 1]$.

Elektronen: **Fermionen**, können nur benachbarte Zustände einnehmen, nicht denselben (vgl. Bose-Einstein-Kondensat).

Neue Untersuchungen: **Quantenmechanische Effekte** (analog **Zeeman-Effekt**) bereits bei

$$\hbar = \epsilon = 2^{-53} \approx 10^{-16}.$$

Cluster von Ritzwerten, aus „teil-stabilisierten“ Ritzwerten zusammengesetzt.

Mathematik korrekt, angestrebte **Interpretation schwammig**, aber hilfreich, um beobachtete Vorgänge (konzeptuell) zu erfassen.

Fazit und Ausblick

- ▶ Rechnen auf dem Rechner mit Rundungsfehlern:
Realität bei $h \approx 10^{-16}$.

Fazit und Ausblick

- ▶ Rechnen auf dem Rechner mit Rundungsfehlern:
Realität bei $h \approx 10^{-16}$.
- ▶ Viel **mathematische Hintergrundarbeit** noch zu erledigen ...
(Zusammenarbeit mit Ivo Panayotov/Oxford; Bachelorarbeiten?)

Fazit und Ausblick

- ▶ Rechnen auf dem Rechner mit Rundungsfehlern:
Realität bei $h \approx 10^{-16}$.
- ▶ Viel **mathematische Hintergrundarbeit** noch zu erledigen ...
(Zusammenarbeit mit Ivo Panayotov/Oxford; Bachelorarbeiten?)
- ▶ Reicht doch als Fazit, oder?



Vielen Dank für eventuelle
Aufmerksamkeit :)