

Laplace Tabelle

$x(t)$	$X(s)$
$\delta^n(t)$	s^n
$\delta'(t)$	s
$\delta(t)$	1
$\sigma(t)$	$1/s$
$t\sigma(t)$	$1/s^2$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(t)$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(bt)\sigma(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)\sigma(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{-at}\sin(bt)\sigma(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos(bt)\sigma(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}\sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{(c-a)e^{-at}-(c-b)e^{-bt}}{b-a}\sigma(t)$	$\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$
$x(t-d)$	$e^{-sd}X(s)$
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^nX(s)-s^{n-1}x(0)$ $-s^{n-2}\frac{d}{dt}x(0)-\dots-\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(0)$

System 2. Ordnung (ohne Nullstellen)

$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$ Übertragungsfkt.

$K = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$ Statische Verstärkung

$w_n = \sqrt{a_0}$ Eigenfrequenz

$\zeta = \frac{a_1}{2w_n}$ Dämpfung

$G(s) = K \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$

$G = \frac{Y}{R}$

$w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$
Gedämpfte Eigenfrequenz

$\zeta = \sin(\Theta)$
 $\zeta=1$ = Kritische Dämpfung
 $\zeta=0,7$ = Praxis

$\text{Im}(s) \uparrow \Rightarrow w_d \uparrow \Rightarrow \Theta \downarrow \Rightarrow \zeta \downarrow \Rightarrow M_p \uparrow$

Ziegler-Nichols Tuning Rules

Tangente im Wendepkt.
Nur als Sprungantwort möglich

	K_P	T_I	T_D
P	$1/a$	∞	0
PI	$0.9/a$	$3L$	0
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$

Für $0,1 < L/\tau < 1$

Nyquist-Diagramm

BODE \rightarrow Nyquist (L-Ebene)

- Charakteristische Punkte markieren aus Bode ($|G|$ für $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$)
- Grenzwerte von $|G|$ und Φ für $w \rightarrow 0$ bzw. $w \rightarrow \infty$ berechnen / ablesen
- $|G|$ - Radius; Φ - Phase
- Diagramm an der Realsache spiegeln!

Z.B. $1/(1+s)$

Final Value Theorem

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Initial Value Theorem

$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

P-Regler

$C(s) = K_P$

Erhöhung von K_P :

- Erhöhung von w_n
- Erhöhung von Ozillation
- Verringerung der Anstiegszeit
- Geringere Regelabweichung

Ziegler 2 (n-m >= 2)

Geschlossenes System mit P-Regler

$C(S) = K_{cr}(s)$
 K_{cr} und dann P_{cr} bestimmen bei dem das System gerade instabil wird

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5 \cdot K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$0.83 \cdot P_{cr}$	0
PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot P_{cr}$	$0.125 \cdot P_{cr}$

Stabilitätskriterien

$Z = N + P$
 $Z=0 \rightarrow$ Closed-Loop ist stabil
 P = Anzahl instabiler Open-Loop-Pole
 N = Umschließungen von -1
Im UZS pos. gegen UZS negativ

Steady-State-Error

$G_{er} = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+L(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+L(s)} R(s)$

$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$

mit $R=1/s$ (Sprung) / $R=1/s^2$ (Rampe)

Sprung (Open Loop):

$K_{pos} = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_L}{s^k d_L}$

TYP	K_{pos}	e_{∞}
0	$L(0)$	$1/(1+K_{pos})$
1	∞	0
2	∞	0

PD-Regler

$C(s) = K_P(1+T_D s)$ ideal

Pol einfügen, da sonst physik. nicht realisierbar

$C(s) = (T_D s)/(1+\gamma T_D s)$ real $\gamma=0,1$

K_P : ändert w_n , verringert e_{∞}
 T_D : ändert ζ unabhängig von w_n ($T_D \uparrow \zeta \downarrow$)

Wurzelortskurve

- Open Loop Pole und Nullstellen in der S-Ebene markieren
- Re-Achse links von einer ungeraden Anzahl von PS & NST markieren
- Asymptoten:
 $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^m \text{Re } p_i - \sum_{i=1}^n \text{Re } z_i}{n-m}$ n: Anzahl der Pole
m: Anzahl der Nullstellen

$\Phi_{\infty} = 180^\circ + l \frac{360^\circ}{n-m}$ $l = 0, \dots, n-m-1$

4: Anfangswinkel
Winkel gegen Uhrzeigersinn messen
 $-\Phi_1, \dots, -\Phi_n = 180^\circ + l 360^\circ$

5: Break Away, Break In Points

Amplituden- und Phasenreserve (GM, PM)

GM: Gainmargin, Amplitudenreserve, Verstärkungsreserve
PM: Phasemargin, Phasenreserve

Stabilität
 $K_P < GM$
 $\Delta \varphi < PM$

$1/(GM) = 1/(K_P)$
 $\zeta = PM/100$

Rampe (Open Loop):

$K_{vel} = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_L}{s^{k-1} d_L}$

TYP	K_{vel}	e_{∞}
0	0	∞
1	$n_L(0)/d_L(0)$	$1/K_{vel}$
2	∞	0

I-Regler

$C(s) = K_P/(T_I s)$

- Verkleinerung von TI: schnelles abklingen der Regelabweichung auf 0
- Verringerung der Dämpfung

PI-Regler
 $C(s) = K_P(1+1/(T_I s))$

Regelabweichung zu 0 $\rightarrow e_{\infty} = 0$
Verringert Dämpfung

$K = \frac{-1}{L(s)} = -\frac{a(s)}{b(s)}$ $L(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$

$b \frac{da}{ds} - a \frac{db}{ds} = 0$ nach s auflösen

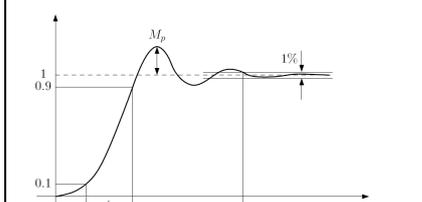
m Pole laufen in Nullstellen
n-m Pole laufen ins Unendliche

Radius: $r = \sqrt{|p_1 - z| |p_2 - z|}$

Nyquist-Direkt

$w=0, w=\infty, w_k, 1$ überlegen
evtl. konjugiert komplex erweitern

wenn PS=0
gehört $P_i=0$ zur LHE oder RHE?
 s_1 ganz klein (0,00001) und s_2 in $G(s)$
 $G(s) = -j 0,00001; s_2 = 0,00001$
 $G(s_2)$ positiv Skalar $\rightarrow \Phi = 0^\circ > P_1$ zu LHE
negativ Skalar $\rightarrow \Phi = 180^\circ > P_1$ zu RHE
wenn $P_i=0$ zur RHE gehört schließt der Bogen ($w=0$) nach links herum
 \rightarrow Umschlingung von -1 \rightarrow instabil



PID-Regler

$C(s) = K_P[1 + T_D s + 1/(T_I s)]$

Kleines T_I : schnell $e \rightarrow 0$ Reduziert Dämpfung
Hohes T_D : Höhere Dämpfung, $w_n \uparrow$
Hohes K_P : höheres w_n (Geschwindigkeit der Antwort erhöht sich)

$K_P=1$
 $T_D=1$
 $T_I=1$

Leichte Reduzierung der Dämpfung (PID)

Wurzelortskurve bei negativer Verstärkung

- Re-Achse links von gerader Anzahl von NST & PS markieren
- $\Phi_{\infty} = \frac{l 360^\circ}{n-m}$
 $\arg(L(s)) = 0 + \frac{l 360^\circ}{n-m}$

Nyquist ablesen am Pkt:

- 0dB Bode ($|G|=1$ Einheitskreis)
- $w \rightarrow 0$; $w \rightarrow \infty$
- Phase = $\pm 180^\circ$ (Durchgang reelle Achse)
- Übertragungsfunktion ablesen

Elektrisches System

$L \frac{di}{dt} + Ri + v_0 = v_i$

$y''(t) + \frac{R}{L} y'(t) + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t)$

$C \frac{dv_0}{dt} = i$

$G(s) = \frac{1/LC}{s^2 + R/Ls + 1/LC}$

2. System (R jetzt bei C im Zweig und nicht mehr bei L)

$G(s) = \frac{r/Ls + 1/LC}{s^2 + R/Ls + 1/LC}$

$t_r = \text{Anstiegszeit} \approx \frac{1,7}{w_n}$

$t_p = \text{Überschwingzeit} \approx \frac{\pi}{w_d}$

$t_s = \text{Ausschwingzeit} \approx \frac{4,6}{\zeta w_n} = \frac{4,6}{\sigma}$

$M_p = \text{Überschwingweite} \approx 1 - \frac{\zeta}{0,6} = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}$

$\zeta = \frac{\sqrt{(\ln M_p)^2}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}$

Integrator Windup Effekt

Controlled Output vs Controlled Input

Aufladen des Integrators durch Aktoren Sättigung
Entladen führt zu Überschwingen

Pole und Nullstellen

-Amplitude der Schwingung umso größer je größer Imaginärteil
-Dämpfung größer je größer Θ wird (1 bei $90^\circ, 0$ bei 0°)
Pol weit links:
-STEP steigt am Anfang stark an
- $\text{Im}(s) \uparrow \Rightarrow w_D \uparrow \Rightarrow \zeta \downarrow \Rightarrow M_p \uparrow$
-geringe Auswirkung (so zu behandeln wie normales System 2. Ordnung)
Negative NST: zusätzliches Überschwingen
Positive NST: Unterschwingen

$P_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}/-1/2$

Systeme 1. Ordnung

$G(s) = \frac{b_0}{s+a_0} = \frac{b_0/a_0}{1/s + 1/a_0} = \frac{K}{\tau s + 1}$

$K = \frac{b_0}{a_0}; \tau = \frac{1}{a_0}$

Sprungantwort:
 $y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$

Wassertank

$R = \frac{h}{q_0} \quad Cdh = (q_i - q_s) dt$

$Rch' \neq h = Rq_i$

$y'(t) - 1/(RC) y(t) = 1/c u(t)$

$G(s) = \frac{1/C}{s - 1/(RC)}$

