Normale Fourier Trafo

Eigenschaften

siehe Zusatzszettel:

$s(t)$	$S(f)$
$K\cdot\delta(t)$	K
K	$K\cdot\delta(f)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\epsilon(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{rect}(t/T)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}(\pi fT)$
$\mathrm{tri}(t/T)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}^2(\pi fT)$
$\mathrm{si}(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2f_0}\mathrm{rect}(f/2f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{(2\pi f)^2+a^2}$
$\epsilon(t)\cdot e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{j2\pi f+a}$
$\epsilon(t)\cdot e^{-a\lvert t\rvert}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(j2\pi f+a)^n}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$f_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0),\quad f_0=\frac{1}{T}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$(j2\pi f)^n$
$\lvert t\rvert$	$-\frac{1}{2(\pi f)^2}$
t^n	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n\cdot\frac{d^n}{df^n}\delta(f)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ **Hin**

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$ **Rück**

Existenzbedingung: $\omega=2\pi\cdot f$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert dt\le M<\infty$$

Parsevalsche Glg.

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert F(j\omega)\rvert^2d\omega$$

$$\begin{array}{ccccc} e(t) & * & h(t) & = & a(t)\\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow\\ E(f) & \cdot & H(f) & = & A(f)\end{array}$$

Faltungssatz

$f(t-t_0)\circ\!\!-\!\!\bullet F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$F(j\omega-j\omega_0)\bullet\!\!-\!\!\circ f(t)e^{j\omega_0 t}$

$F(jt)\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi f(-\omega)$

$\frac{d}{dt}f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet j\omega F(j\omega)$

$f(at)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

$F(jb\omega)\bullet\!\!-\!\!\circ\frac{1}{\lvert b\rvert}f\left(\frac{t}{b}\right)$

$f(-t)\circ\!\!-\!\!\bullet F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

$f(-t)\circ\!\!-\!\!\bullet F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

Diskrete ZDS10

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot\delta(n-k)$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot h(n-k)=s(n)*h(n)$$ **Faltung**

Stabilität:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert h(n)\rvert=M<\infty$$

$$H(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)\cdot e^{-j\cdot2\pi f\cdot nT}<\infty$$

Kausalität:

$h(n)=0$

$\forall n<0$

Kontinuierliche

Faltung **1.Kap 16**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=u(t)*h(t)$$

Kausalität:

$$x_k(t)=\begin{cases}x(t) & \text{für } t\ge0\\ 0 & \text{für } t<0\end{cases}$$

Stabilität:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert h(t)\rvert dt<M<\infty$$

Zeit-Diskrete Fourier Trafo

$$X_a(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot e^{-j2\pi fnT}$$ Trafo

$$x(n)=\int_{-1/2T}^{1/2T}X_a(f)\cdot e^{j2\pi fnT}df$$ Rücktrafo

Achtung Fälle unterscheiden!

1.Fall: $f\neq\frac{k}{T}$ 2.Fall $f=\frac{k}{T}$

$$\begin{array}{ccccc} s(n) & * & h(n) & = & y(n)\\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow\\ S_d(f) & \cdot & H_d(f) & = & Y_d(f)\end{array}$$

Zeitdiskreter Faltungssatz

Eigenschaften siehe ZDS19 - 30

$s(n-m)\circ\!\!-\!\!\bullet S(f)\cdot e^{-j2\pi f\cdot m}$

$e^{j2\pi\cdot f_0\cdot n}\cdot s(n)\circ\!\!-\!\!\bullet S(f-f_0)$

$s(-n)\circ\!\!-\!\!\bullet S(-f)$

$\overline{s(n)}\circ\!\!-\!\!\bullet\overline{S(-f)}$

$n\cdot s(n)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{j}{2\pi}\cdot\frac{d}{df}S(f)$

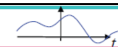
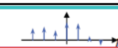
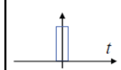
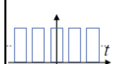
$$\begin{array}{ccccc} s(n) & = & s_g(n) & + & s_u(n)\\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow\\ S(f) & = & \mathrm{Re}\{S(f)\} & + & j\cdot\mathrm{Im}\{S(f)\}\end{array}$$

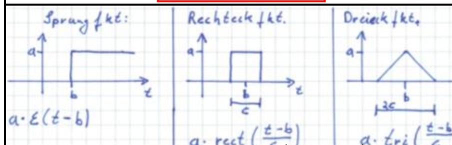
Parsevalsche Glg.

$$E_s=\phi_{ss}^E(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert s(n)\rvert^2=\int_{-1/2}^{1/2}\Phi_{ss}^E(f)\cdot\underbrace{e^{j\cdot2\pi f\cdot n}}_{=1,\ n=0}df=\int_{-1/2}^{1/2}\lvert S(f)\rvert^2df$$

Energiesignal, wenn:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert s(n)\rvert^2<\infty$$

	kontinuierlich 	zeitdiskret 
nicht periodisch 	**Fourier-Integral** frequenzkontin., nicht periodisch $S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt$ $s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi ft}df$	**Zeitdiskrete Fourier-Trafo.** frequenzkontin., periodisch $S_a(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)e^{-j2\pi f\cdot nT}$ $s(n)=\int_{-f_{max}}^{f_{max}}S_a(f)e^{j2\pi f\cdot nT}df$
periodisch 	**Fourier-Reihe** frequenzdiskret, nicht periodisch $S_k=\frac{1}{T}\int_0^T s_T(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}$ $s_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_ke^{j2\pi\frac{k}{T}t}$	**Diskrete Fourier-Trafo. (DFT)** frequenzdiskret, periodisch $S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT)W_N^{kn}$ $s(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}S(k)W_N^{-kn}$ $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$



$$a\cdot rect\left(\frac{t-b}{c}\right)=a\cdot\varepsilon\left(t-b+\frac{c}{2}\right)-a\cdot\varepsilon\left(t-\left(b+\frac{c}{2}\right)\right)$$

$$a\cdot tri\left(\frac{t-b}{c}\right)=\frac{a}{c}\cdot\left(\rho(t-b+c)-2\rho(t-b)+\rho(t-b-c)\right)$$

Rampenfkt.

$$\rho(t)=\begin{cases}t & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=t\cdot\varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t)=\varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=\delta(t)$$

Reelwertige Fourier-Reihe

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\cos\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)dt$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\sin\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)dt$$

$f(t)=f(-t)$, d.h. $f(t)$ ist gerade Funktion:

$$A_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos(k\omega t)dt,\qquad B_k=0$$

$f(t)=-f(-t)$, d.h. $f(t)$ ist ungerade Funktion:

$$A_k=0,\qquad B_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin(k\omega t)dt$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Parsevalsche Glg.

$$P=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert S_k\rvert^2=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\lvert s(t)\rvert^2dt$$

Komplexwertige Fourier-Reihe

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_k\exp\left(j\cdot k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$$

$$S_k=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cdot\exp\left(-j\cdot k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)dt$$

$$=\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cdot\cos\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)dt}_{=\frac{1}{2}a_k}-j\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cdot\sin\left(k\cdot2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)dt}_{=-j\frac{1}{2}b_k}$$

Falls $s(t)$ reell

$$S_k=S_k'+jS_k''=\tfrac{1}{2}a_k-j\tfrac{1}{2}b_k$$

Energie $E=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert y(t)\rvert^2dt$

Leistung $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\lvert y(t)\rvert^2dt$

Korrelation:

zeitkontinuierlich

$r_{fg}^E(\tau)=f^*(-\tau)*g(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet F^*(j\omega)\cdot G(j\omega)$

zeitdiskret:

$$\Phi(n)=s(n)\otimes s(n)=\sum_{k=N}^{N}s(k)s(n+k),\quad n\in\mathbb{N}$$
$$=\sum_{k=N}^{N}s(k)s(n-(-k))$$
$$=s(n)*s(-n)$$

$$\Phi_{xy}=\Phi_{xx}\cdot H$$

Diskrete Fourier Trafo

Eigenschaften wie bei ZDFT

Siehe ZDS50/52

Twiddle-Faktor

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Achtung Fälle unterscheiden!

1.Fall: $k\neq N\cdot l$ 2.Fall $k=N\cdot l$ $l\in Z$

Aus ZDFT:

$$S_a(k)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{kn}$$

$$s(n)=\sum_{k=0}^{N-1}S_a(k)\cdot W_N^{-kn}$$

Aus Fourierreihe

N=Periode

$$X(k)=X_a\left(\frac{k}{NT}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{kn}\qquad k=0,\dots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)\cdot W_N^{-kn}\qquad n=0,\dots,N-1$$

Wichtige Formeln für Reihen:

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot(k-m)}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{+j\frac{2\pi}{N}n\cdot(m-k)}=\begin{cases}N & k=lN+m\\ 0 & sonst\end{cases}$$

Geo. Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad\textit{für }\lvert x\rvert<1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\frac{1-a^N}{1-a}\quad a\neq1$$

Laplace Trafo Zusatzzettel:

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$ zweiseitig

$$s=\sigma+j\omega$$

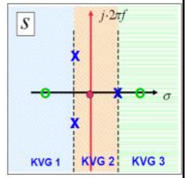
$$\boxed{F(s)=\int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$$ einseitig

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds}$$ Umkehr-integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt\le M<\infty$$ Existenzbedingung

Kausalität
- Rechtsseitig (kausal) $\sigma>\max\{\sigma_{\infty i}\}$ (KVG 3)
- Linksseitig (Antikausal) $\sigma<\min\{\sigma_{\infty i}\}$ (KVG 1)
- Zweiseitig (Nicht Kausal) (KVG 2)

• Stabilität (hier KVG 2)
$j\cdot 2\pi f$-Achse $\in$ KVG



$n=n_0+n_1+2n_2$ Polstellenanzahl
n_0 Pole bei $s=0$
n_1 reelle von Null verschiedene Pole
n_2 komplexe Polpaare
m Nullstellenanzahl

Bodediagramme Kap6 Folien14-24

$$H(s)=H_0\frac{s^{m_0}\cdot\prod_{j=1}^{m_1}(s-s_{0j})\cdot\prod_{j=m_1+1}^{m_1+m_2}\left(s^2+s\frac{|s_{0j}|}{Q_{0j}}+|s_{0j}|^2\right)}{s^{n_0}\cdot\prod_{i=1}^{n_1}(s-s_{\infty i})\cdot\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(s^2+s\frac{|s_{\infty i}|}{Q_{\infty i}}+|s_{\infty i}|^2\right)}$$

PBZ, siehe Kap. 5 Folie 20ff:

$$F(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}a_m z^m}{z^N+\sum_{n=0}^{N-1}b_n z^n}=\frac{Z(z)}{\prod_{i=1}^{P}(z-z_{\infty i})^{r_i}}=\frac{Z(z)}{D(z)}\Rightarrow F(z)=\sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{A_{ik}}{(z-z_{\infty i})^k}$$

Residuen: n-ter Ordnung

$$A_{ik}=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(F(z)\cdot(z-z_{\infty i})^{r_i}\right)\Big|_{z=z_{\infty i}},\ \nu=r_i-k.$$

mit $M<N$
$M=$ Zählergrad, $Z(z)=$ Zählerpolynom
$N=$ Nennergrad, $N=\sum_{i=1}^{P}r_i$, $D(z)=$ Nennerpolynom
$P=$ Anzahl der Polstellen
$r_i=$ Vielfachheit des i-ten Poles $z_{\infty i}$

Residuen: 1-ter Ordnung

$$\boxed{A_i=(z-z_{\infty i})\cdot F(z)\big|_{z=z_{\infty i}}}$$

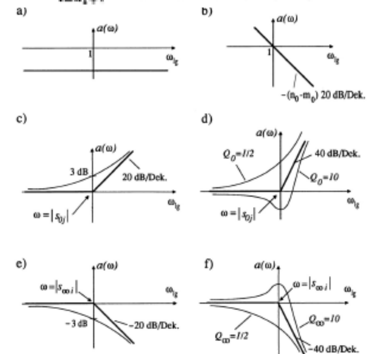
Hurwitzpolynom: wenn stabil, alle Koeffi positiv
notwendige Bed.: alle Koeffi sind reel und haben gleiches Vorzeichen
Hinreichende Bed.: Polynom in gerade und ungerade Anteil, größte potenz in Zähler -> Polynomdivision -> Kettenbruch (im Zähler(oben) eine 1) -> Koeffi gleiches Vorzeichen wie vorher?

Betrag

$$\left|\tilde{H}_0\right|=|H_0|\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m_1}|s_{0j}|\cdot\prod_{j=m_1+1}^{m_1+m_2}|s_{0j}|^2}{\prod_{i=1}^{n_1}|s_{\infty i}|\cdot\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}|s_{\infty i}|^2}$$

$$\begin{aligned}a(\omega)&=20\lg|H(j\omega)|\\&=20\lg|\tilde{H}_0|-(n_0-m_0)20\lg|j\omega|\\&+\sum_{j=1}^{m_1}20\lg\left|\frac{j\omega}{s_{0j}}-1\right|+\sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2}20\lg\left|\frac{-\omega^2}{|s_{0j}|^2}+\frac{j\omega}{Q_{0j}|s_{0j}|}+1\right|\\&-\sum_{i=1}^{n_1}20\lg\left|\frac{j\omega}{s_{\infty i}}-1\right|-\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}20\lg\left|\frac{-\omega^2}{|s_{\infty i}|^2}+\frac{j\omega}{Q_{\infty i}|s_{\infty i}|}+1\right|\end{aligned}$$

a) Grundgewinn
b) Pole und Nullstellen im Ursprung
c) Reelle Nullstelle
d) Komplexes Nullstellenpaar
e) Reelle Polstelle
f) Komplexes Polstellenpaar



Z-Trafo zeitdiskrete Signale:

ZT36 ff

$$\boxed{z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\cdot 2\pi f)T}}$$

Existenzbedingung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|s(n)\cdot z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|s(n)\cdot r^{-n}\right|<\infty$$

$$\boxed{S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)\boxed{r^{-n}}\cdot e^{-j\cdot 2\pi f\cdot n}}$$

Verallgemeinerung der ZDFT $r\in\mathbb{R},\ 0\le r<\infty$

$$\begin{array}{ccccc}s(n)&*&h(n)&=&y(n)\\ \circ&&\circ&&\circ\\ S(z)&\cdot&H(z)&=&Y(z)\end{array}$$

Faltungssatz der Z-Trafo

$$Z\{s(-n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(-n)\cdot z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot z^{k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot(z^{-1})^{-k}=S\left(\frac{1}{z}\right)$$

Eigenschaften

$$Z\{s(n+m)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n+m)\cdot z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot z^{-(k-m)}=z^{m}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot z^{-k}$$

$$Z\{s(n-m)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n-m)\cdot z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot z^{-(k+m)}=z^{-m}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)\cdot z^{-k}=z^{-m}\cdot Z\{s(n)\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n\cdot s(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)\cdot\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

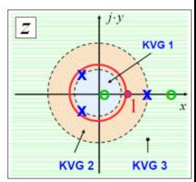
$$n\cdot s(n)\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad -z\cdot\frac{d}{dz}S(z)$$

$$Z\{a\cdot x(n)+b\cdot y(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a\cdot x(n)+b\cdot y(n))\cdot z^{-n}=a\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot z^{-n}+b\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\cdot z^{-n}=a\cdot Z\{x(n)\}+b\cdot Z\{y(n)\}$$

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)\cdot z^{-n}\Rightarrow\overline{S(\bar{z})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{s(n)}\cdot z^{-n}$$

• Kausalität
- Rechtsseitig (kausal) $|z|>\max\{|z_{\infty i}|\}$ (KVG 3)
- Linksseitig (antikausal) $|z|<\min\{|z_{\infty i}|\}$ (KVG 1)
- Zweiseitig (nicht kausal) (KVG 2)

• Stabilität (hier KVG 2)
Einheitskreis $\in$ KVG



Kausale Exponentialfolge

$$f(n)=a^n\cdot\varepsilon(n)\circ\!\!-\!\!\bullet F(z)=\frac{z}{z-a}\ \text{für}\ |z|>|a|$$

AntiKausale Exponentialfolge

$$f(n)=-a^n\cdot\varepsilon(-n-1)\circ\!\!-\!\!\bullet F(z)=\frac{z}{z-a}\ \text{für}\ |z|<|a|$$

PBZ-Trafo:

$$\frac{A_i}{z-z_{\infty i}}=A_i z^{-1}\frac{z}{z-z_{\infty i}}\bullet\!\!-\!\!\circ\begin{cases}A_i z_{\infty i}^{n-1}\cdot\varepsilon(n-1) & |z|>|z_{\infty i}|\\ -A_i z_{\infty i}^{n-1}\cdot\varepsilon(-n) & |z|<|z_{\infty i}|\end{cases}$$

a>0, also Beträge

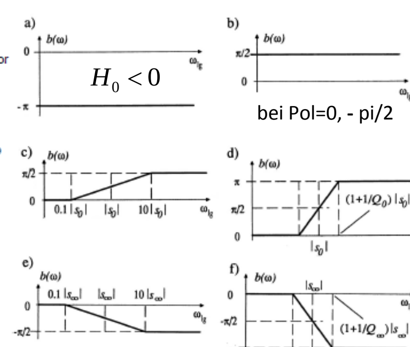
$f(n)$	$F(z)$	Konvergen
$\delta(n)$	1	alle z
$\epsilon(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\epsilon(n)\cdot n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
$\epsilon(n)\cdot n^2$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert>1$
$\epsilon(n)\cdot e^{-an}$	$\frac{z}{(z-e^{-a})}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^{-a}\rvert$
$\epsilon(n)\cdot n\cdot e^{-an}$	$\frac{e^{-a}z}{(z-e^{-a})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^{-a}\rvert$
$\epsilon(n)\cdot n^2\cdot e^{-an}$	$\frac{e^{-a}z(z+e^{-a})}{(z-e^{-a})^3}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^{-a}\rvert$
$\epsilon(n)\cdot a^n$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\epsilon(n)\cdot n\cdot a^n$	$\frac{za}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\epsilon(n)\cdot n^2\cdot a^n$	$\frac{az(a+z)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\epsilon(n)\cdot n^3\cdot a^n$	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\epsilon(n)\cdot\cos(\omega n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\epsilon(n)\cdot\sin(\omega n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\epsilon(n)\cdot 1/n!$	$e^{1/z}$	$\lvert z\rvert>0$

Phase:

$$b(\omega)=\operatorname{arc}\left(H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-s_{0j})}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_{\infty i})}\right)=\operatorname{arc}\left(H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}|s-s_{0j}|\exp(j\varphi_j)}{\prod_{i=1}^{n}|s-s_{\infty i}|\exp(j\psi_i)}\right)$$

$$=\operatorname{arc}H_0+\sum_{j=1}^{m}\varphi_j-\sum_{i=1}^{n}\psi_i$$

a) Negativer Skalierungsfaktor
b) Einfache Nullstelle im Ursprung
c) Reelle Nullstelle
d) Komplexes Nullstellenpaar
e) Reelle Polstelle
f) Komplexes Polstellenpaar



nur für s_0 und s_∞ in der linken Halbebene

RückTrafo: Z-Trafo

$$\sum_{k\in\gamma}\operatorname{Res}\left\{F_0(z)\big|_{z_{\infty k}}\right\}=-\sum_{k\notin\gamma}\operatorname{Res}\left\{F_0(z)\big|_{z_{\infty k}}\right\}$$

Berechnung des Umkehrintegr

$$f(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\underbrace{F(z)\cdot z^{n-1}}_{F_0(z)}dz=\sum_k\operatorname{Res}\left\{F_0(z)\big|_{z_{\infty k}}\right\}$$

Dabei verläuft die Kontur γ im Gegenuhrzeigersinn im jeweiligen Konvergenzgebiet. Die Summation erfolgt über die Residuen aller von der Kontur umschlossenen Pole von $F_0(z)$.

Bei der Rücktransformation sind folgende Fallunterscheidungen wichtig:
$n\ge 0\to\cdot\varepsilon(n)$
$n<0\to\cdot\varepsilon(-n-1)$
- Konvergenzgebiet
- Vorzeichen von n, da dieses die Lage von mehrfachen Polen der Funktion $F_0(z)$ (bei Null oder im Unendlichen) bestimmt